Esas perversas funciones continuas...

J. Fernando Barbero G.
Instituto de Estructura de la Materia, CSIC.
Madrid, 11 de noviembre de 2009

Consejo Superior de Investigaciones Científicas

¿Qué pretendo con esta charla?

1. Discutir algunas cuestiones sobre el concepto de función utilizando para ello funciones reales de una variable real. En particular
   - Las funciones como representación de los fenómenos físicos.
   - Continuidad.
   - Derivabilidad
   - ¿Hasta qué punto podemos representar gráficamente una función?

   (Excusas para repasar o pensar sobre ciertos conceptos básicos)
2. Describir un ejemplo concreto de función continua en un intervalo pero no derivable en ninguno de sus puntos: **La función de Takagi**.
3. ¿Son realmente las funciones continuas las que podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel?
4. ¿A quien está dirigida esta charla?

Todo el mundo	Pensar un poco	Para iniciados
$1+1=2$	$1+1=10$	$1+1=1$

¿Qué pretendo con esta charla?

1. Discutir algunas cuestiones sobre el concepto de función utilizando para ello funciones reales de una variable real. En particular
   - Las funciones como representación de los fenómenos físicos.
   - Continuidad.
   - Derivabilidad
   - ¿Hasta qué punto podemos representar gráficamente una función?

   (Excusas para repasar o pensar sobre ciertos conceptos básicos)
2. Describir un ejemplo concreto de función continua en un intervalo pero no derivable en ninguno de sus puntos: **La función de Takagi**.
3. ¿Son realmente las funciones continuas las que podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel?
4. ¿A quien está dirigida esta charla?

Todo el mundo	Pensar un poco	Para iniciados
$1+1=2$	$1+1=10$	$1+1=1$

¿Qué pretendo con esta charla?

1. Discutir algunas cuestiones sobre el concepto de función utilizando para ello funciones reales de una variable real. En particular
   - Las funciones como representación de los fenómenos físicos.
   - Continuidad.
   - Derivabilidad
   - ¿Hasta qué punto podemos representar gráficamente una función?

   (Excusas para repasar o pensar sobre ciertos conceptos básicos)
2. Describir un ejemplo concreto de función continua en un intervalo pero no derivable en ninguno de sus puntos: **La función de Takagi**.
3. ¿Son realmente las funciones continuas las que podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel?
4. ¿A quien está dirigida esta charla?

Todo el mundo	Pensar un poco	Para iniciados
$1+1=2$	$1+1=10$	$1+1=1$

¿Qué pretendo con esta charla?

1. Discutir algunas cuestiones sobre el concepto de función utilizando para ello funciones reales de una variable real. En particular
   - Las funciones como representación de los fenómenos físicos.
   - Continuidad.
   - Derivabilidad
   - ¿Hasta qué punto podemos representar gráficamente una función?

   (Excusas para repasar o pensar sobre ciertos conceptos básicos)
2. Describir un ejemplo concreto de función continua en un intervalo pero no derivable en ninguno de sus puntos: **La función de Takagi**.
3. ¿Son realmente las funciones continuas las que podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel?
4. ¿A quien está dirigida esta charla?

Todo el mundo	Pensar un poco	Para iniciados
$1+1=2$	$1+1=10$	$1+1=1$

Sumario

1. Las funciones: herramientas para describir fenómenos de la naturaleza.

Sumario

1. Las funciones: herramientas para describir fenómenos de la naturaleza.
2. ¿Qué es una función?

Sumario

1. Las funciones: herramientas para describir fenómenos de la naturaleza.
2. ¿Qué es una función?
3. Gráficas: una forma de ver las funciones.

Sumario

1. Las funciones: herramientas para describir fenómenos de la naturaleza.
2. ¿Qué es una función?
3. Gráficas: una forma de ver las funciones.
4. Algunas propiedades básicas de regularidad de las funciones.
   1. Continuidad.
   2. Derivabilidad.

Sumario

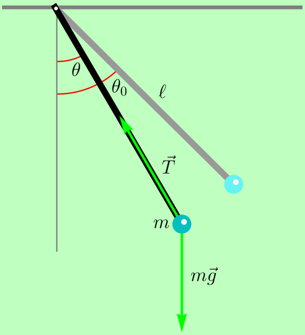
1. Las funciones: herramientas para describir fenómenos de la naturaleza.
2. ¿Qué es una función?
3. Gráficas: una forma de ver las funciones.
4. Algunas propiedades básicas de regularidad de las funciones.
    1. Continuidad.
    2. Derivabilidad.
5. Un hermoso ejemplo: la función de Takagi
    1. Definición.
    2. Evaluación de la función de Takagi.
    3. Representación de la función de Takagi.
    4. La función de Takagi no es derivable.
    5. Fractalidad y Lipschitzianidad.
    6. Otras propiedades curiosas.

Sumario

1. Las funciones: herramientas para describir fenómenos de la naturaleza.
2. ¿Qué es una función?
3. Gráficas: una forma de ver las funciones.
4. Algunas propiedades básicas de regularidad de las funciones.
    1. Continuidad.
    2. Derivabilidad.
5. Un hermoso ejemplo: la función de Takagi
    1. Definición.
    2. Evaluación de la función de Takagi.
    3. Representación de la función de Takagi.
    4. La función de Takagi no es derivable.
    5. Fractalidad y Lipschitzianidad.
    6. Otras propiedades curiosas.
6. Epílogo: Una interesante familia de generalizaciones.

El movimiento del péndulo: un modelo físico

Diagrama de fuerzas



$$\vec{a} = \vec{g} + \vec{T}/m \rightsquigarrow m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0\,, \theta(t_0) = \theta_0\,, \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0}$$

Para ángulos pequeños $\rightsquigarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$

Oscilador armónico , $\left(\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ y } T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)$

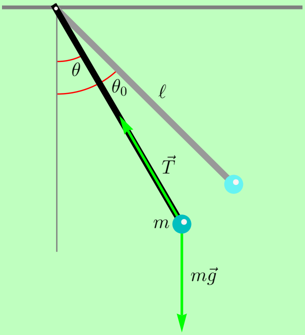
Solución:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\omega(t - t_0) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}\sin\omega(t - t_0)}$$

Para el **péndulo** $\boxed{\omega(t - t_0) = \csc\frac{\theta_0}{2}\left[F\left(\frac{\theta_0}{2}, \csc\frac{\theta_0}{2}\right) - F\left(\frac{\theta}{2}, \csc\frac{\theta_0}{2}\right)\right]}$ $(\dot{\theta}_0 = 0)$

El movimiento del péndulo: un modelo físico

Diagrama de fuerzas



$$\vec{a} = \vec{g} + \vec{T}/m \rightsquigarrow m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0\,, \theta(t_0) = \theta_0\,, \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0}$$

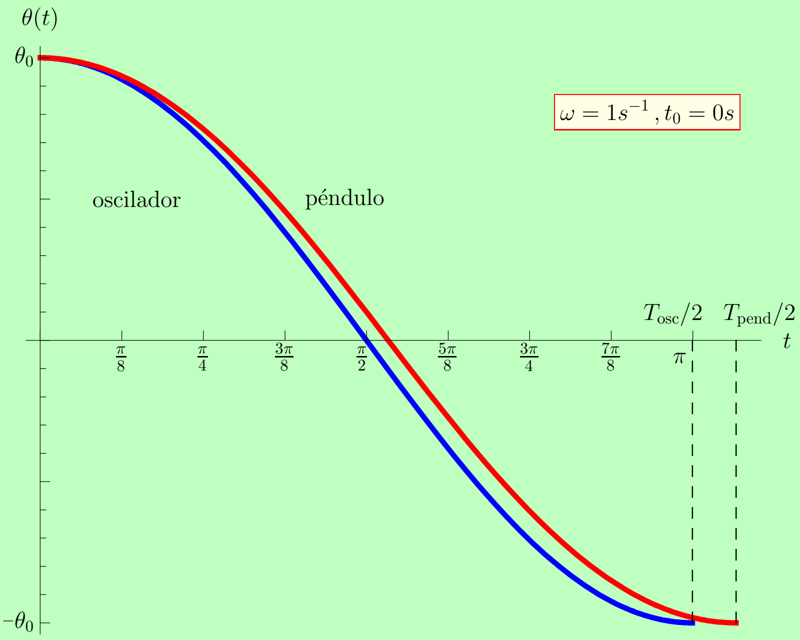
Para ángulos pequeños $\rightsquigarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$

Oscilador armónico , $\left(\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \text{ y } T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)$

Solución:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos\omega(t - t_0) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}\sin\omega(t - t_0)}$$

$F(\varphi, k) := \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}\,d\theta$, **integral elíptica** incompleta de 1ª especie.


$\theta(t)$
θ_0
$-\theta_0$
$\omega = 1s^{-1}, t_0 = 0s$
oscilador
péndulo
$T_{\text{osc}}/2$
$T_{\text{pend}}/2$
t
$\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{8}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{8}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{8}$
π

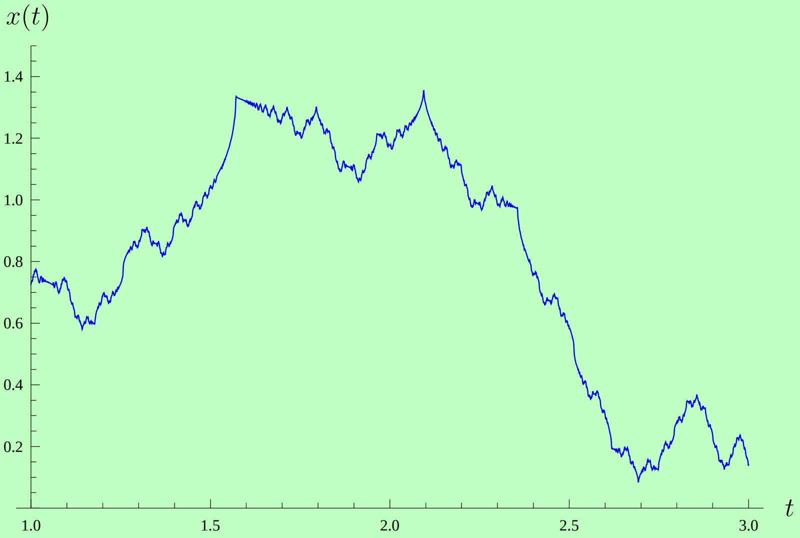
Comentarios

1. El movimiento del péndulo es muy regular.
2. La grafica de $\theta(t)$ que nos proporciona nuestro modelo es muy suave y aproxima muy bien los datos experimentales.
3. Tanto para el oscilador armónico como para el péndulo nuestro modelo nos da **expresiones cerradas** que nos permiten obtener el valor del ángulo para cada instante de tiempo.

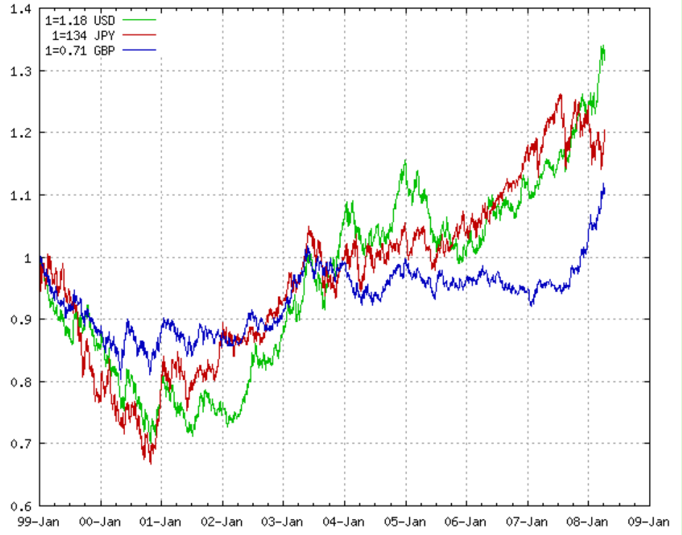
5. La razón de la regularidad de $\theta(t)$ es que el movimiento está descrito por una **ecuación diferencial de segundo orden**.
6. En realidad la “suavidad” de $\theta(t)$ es una **hipótesis de partida** en nuestra descripción.
7. En el caso del péndulo lo fácil es obtener el tiempo en función del ángulo (función inversa).

El movimiento browniano...

Representemos la posición medida de una partícula frente al tiempo...



...o la cotización del euro.



Comentarios

1. El comportamiento que queremos describir es **irregular**.
2. Si quiero hacer un modelo físico no puedo utilizar simples ecuaciones diferenciales. Las leyes que rigen ahora son distintas (¡por eso es difícil hacer predicciones en economia!).
3. La grafica es **muy rugosa** pero, al menos, *no es una nubecilla de puntos*. Para instantes de tiempo (continuo) cercanos las cotizaciones del euro son parecidas.
4. **¿Podemos describir una función así mediante una fórmula?** (esta pregunta recibió respuesta hace algo más de un siglo).
5. En caso afirmativo podremos experimentar y entender aspectos importantes sobre las funciones.
6. La velocidad y la aceleración no están ahora bien definidas experimentalmente, (no hay una “tendencia clara” en los datos) ¿Es eso posible?
7. Como veremos **la existencia de derivadas** nos proporciona un poder de predicción del que carecemos si no existen.

¿Qué es una función?

Concepto "clásico" de función: $y = f(x)$

Relación entre una *variable independiente* x y una *variable dependiente* y. Una fórmula que nos permite calcular la y si conocemos la x. Por ejemplo

$$\boxed{y = \cos x^2 + \frac{\log x}{1 - x^2}}$$

- Definida "donde tenga sentido la fórmula".
- Antiguamente se pensaba que definir una función a trozos era hacer trampa.
- Es posible dar funciones con saltos mediante una fórmula, Por ejemplo:

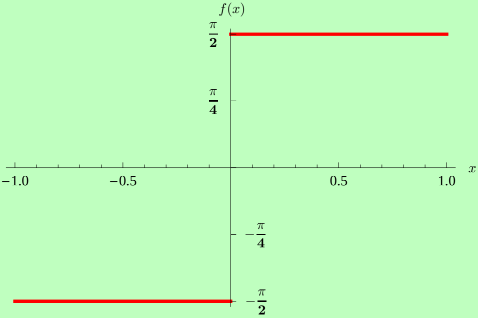
$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}.$$

¿Qué es una función?

Concepto "clásico" de función: $y = f(x)$

Relación entre una *variable independiente* x y una *variable dependiente* y. Una fórmula que nos permite calcular la y si conocemos la x. Por ejemplo

$$\boxed{y = \cos x^2 + \frac{\log x}{1 - x^2}}$$



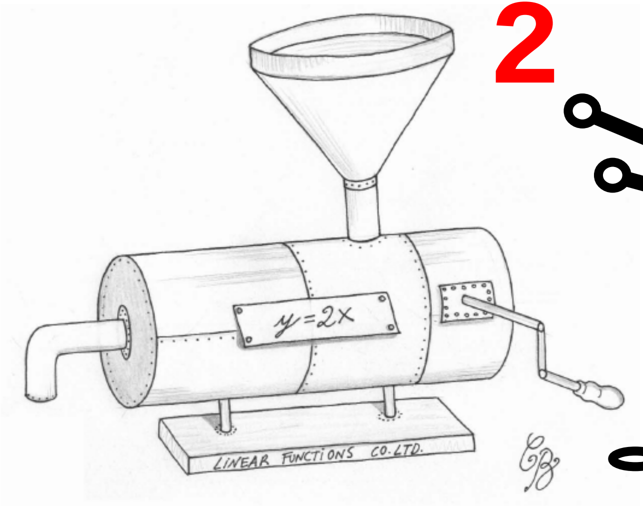
¿Qué es una función?

Concepto "clásico" de función: $y = f(x)$

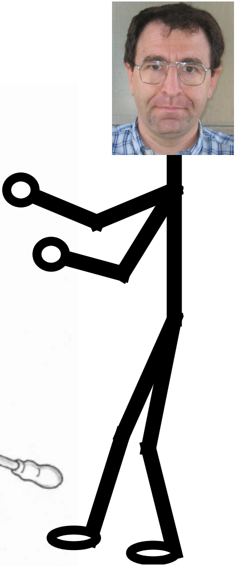
Relación entre una *variable independiente* x y una *variable dependiente* y. Una fórmula que nos permite calcular la y si conocemos la x. Por ejemplo

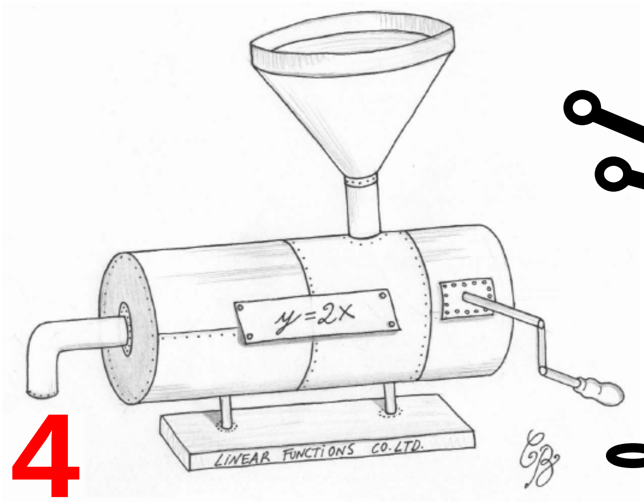
$$\boxed{y = \cos x^2 + \frac{\log x}{1 - x^2}}$$

- Un punto de vista útil (a veces): la función vista como una máquina que proporciona un resultado (*output*) a partir de un dato de entrada (*input*).
- Eso es lo que le pedimos a nuestros modelos físicos: que nos den, por ejemplo, posiciones si introducimos como dato el tiempo t...

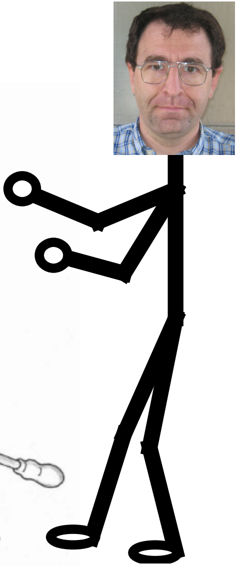


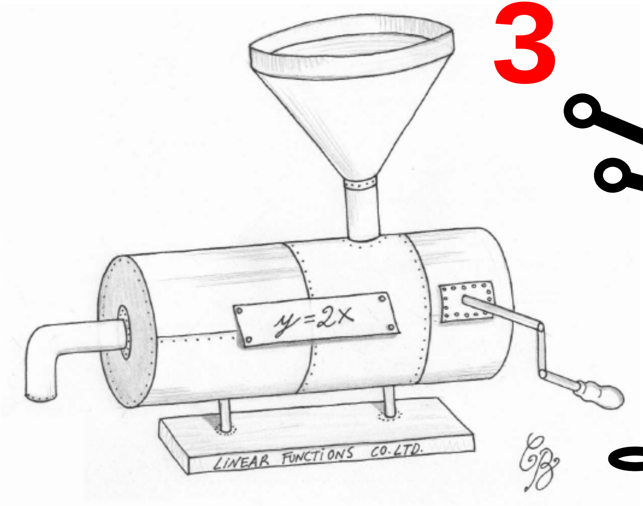
2



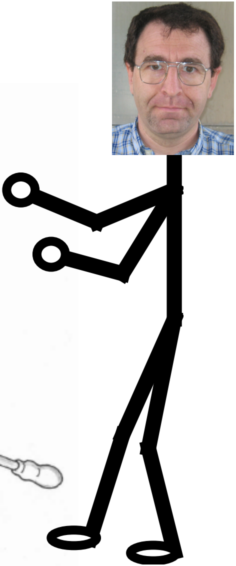


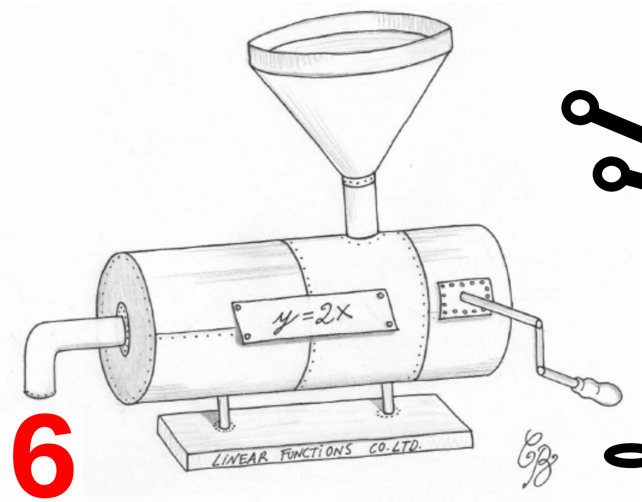
4



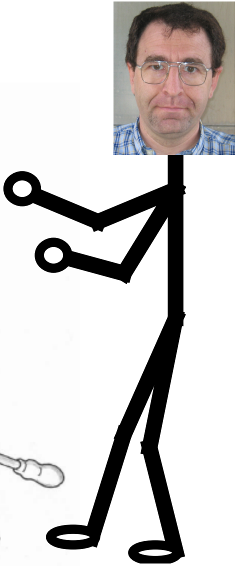


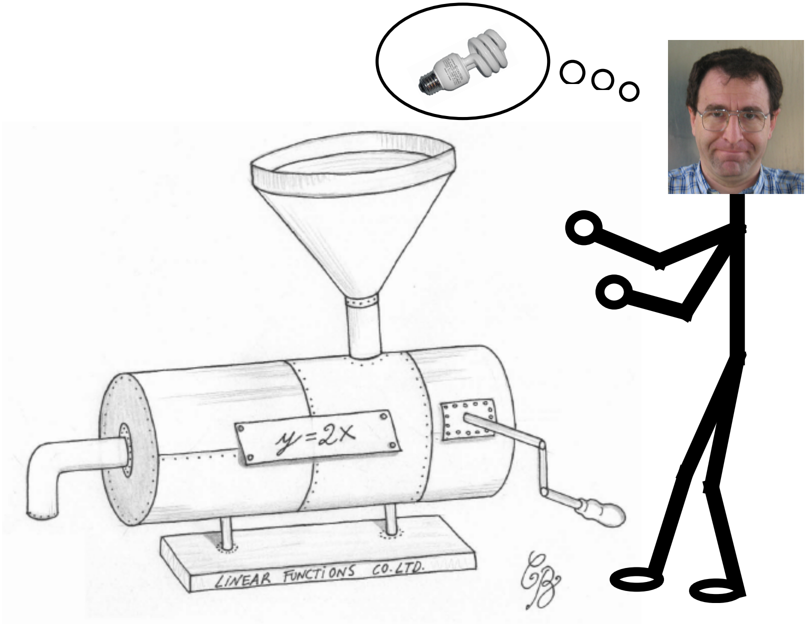
3

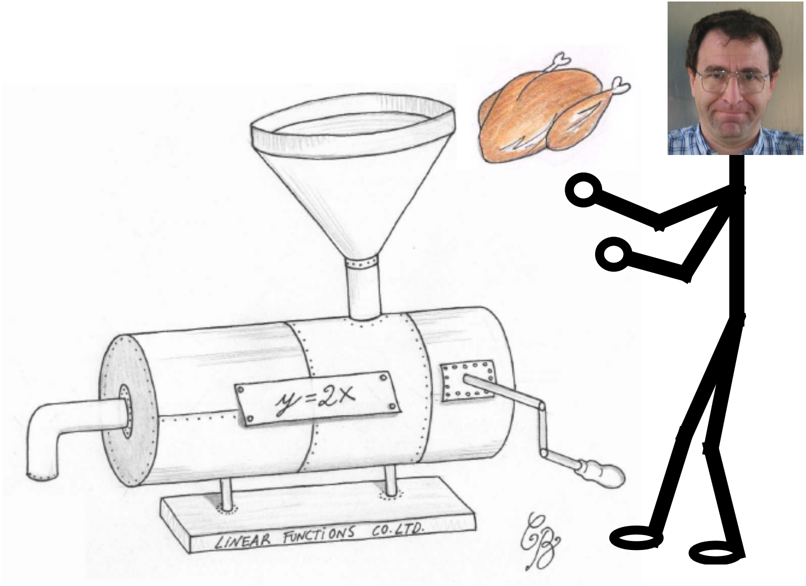


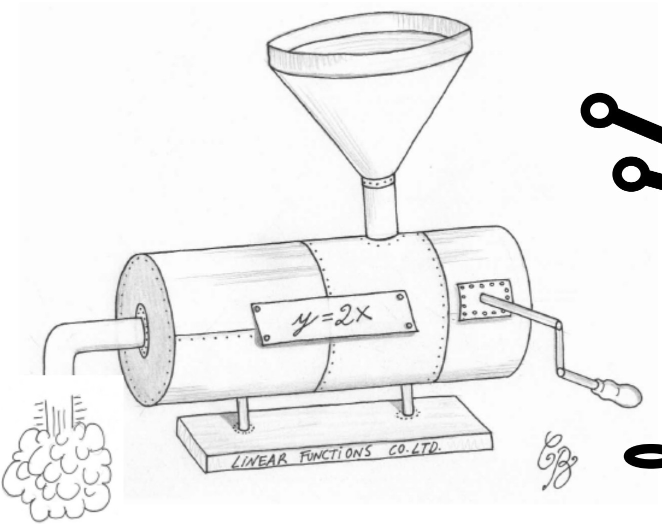


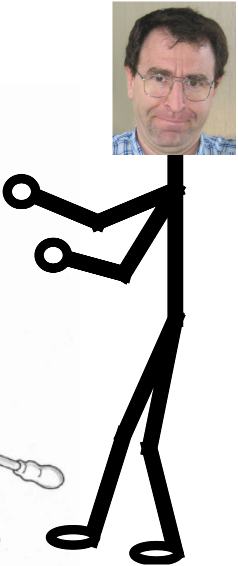
6




y=2X
LINEAR FUNCTIONS CO. LTD.


y=2x
LINEAR FUNCTIONS CO. LTD.


y=2x
LINEAR FUNCTIONS CO. LTD.



Una definición un poco más elaborada

Terna ordenada de conjuntos $(X, Y, G(f))$

- X es el **dominio** de la función (donde “vive” la variable independiente).
- Y es el **recorrido** de la función (donde “toma valores” la variable dependiente).
- $G(f)$ es el **grafo** de la función
  $G(f) \subset X \times Y$, $\forall x \in X \, \exists (x, y) \in G(f)$, $(x, y) = (x, y') \Rightarrow y = y'$
  Todos y cada uno de los elementos del dominio aparecen una sola vez en los pares (x, y) (*cada valor de $x \in X$ tiene una sola imagen*).
- Ejemplo:
  $X = \{$ días de la semana laboral $\}$
  $Y = \{$ A, B, C, J, L, M, V, Z $\}$
  $G(f) = \{$(lunes,L),(martes,M),(miércoles,M),(jueves,J),(viernes,V)$\}$

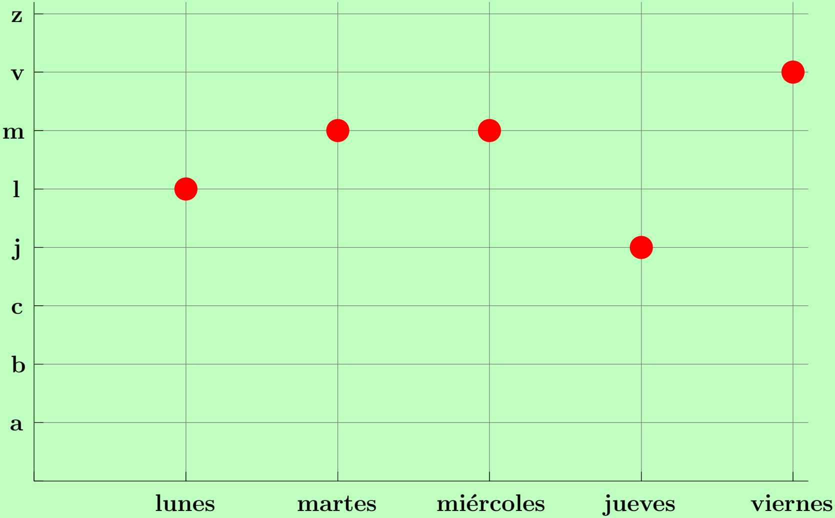
Comentarios

- Una notación frecuente $f : X \to Y : x \mapsto f(x)$.
- La función no toma necesariamente todos los valores del recorrido (cuando lo hace recibe un nombre especial: **función sobreyectiva**).
- La asociación entre cada punto x del dominio y su imagen $f(x)$ puede venir dada de muchas maneras distintas, por ejemplo:

  - Enumeración explícita,
  - una fórmula,
  - un algoritmo que nos diga como calcular $f(x)$ conocida la x,
  - combinando funciones numéricas mediante operaciones aritméticas,
  - a partir de otras mediante composición,
  - un límite,
  - una serie de funciones,
  - una integral,
  - mediante recursión,
  - una ecuación diferencial,
  - utilizando los teoremas de la función inversa o de la función implícita,
  - por continuación analítica,
  - ...

Gráficas: una forma de ver las funciones

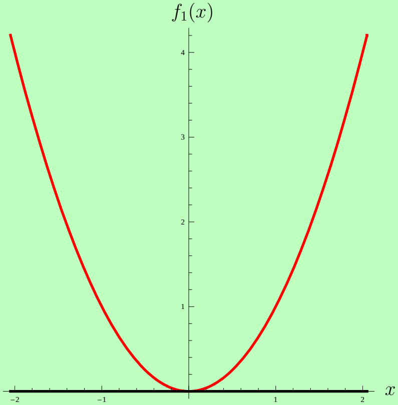
¿Por qué hablamos de grafos?

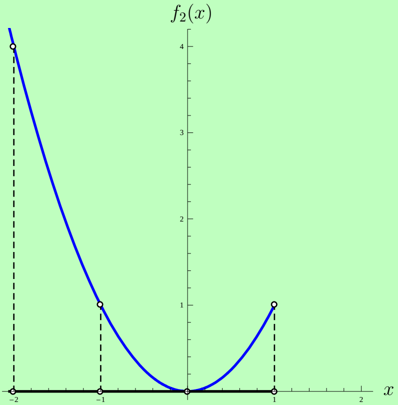


Otros ejemplos

$f_1 = (X, Y, G(f_1))$, $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $G(f_1) = \{(x, x^2) : x \in X\}$

$f_2 = (X, Y, G(f_2))$, $X = (-\infty, 1] \setminus \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{R}$, $G(f_2) = \{(x, x^2) : x \in X\}$



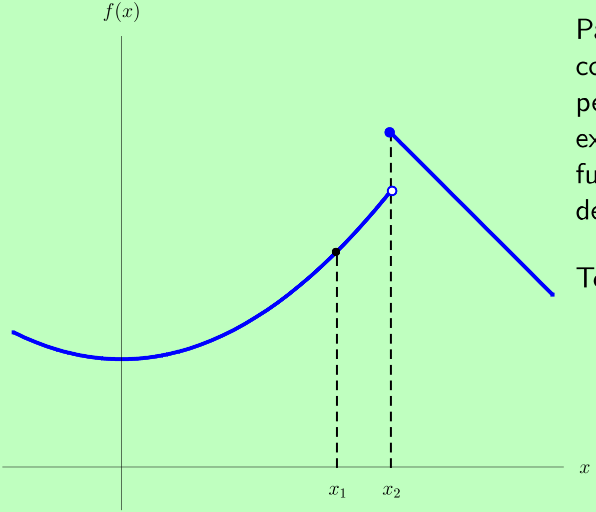


Comentarios

1. La gráfica juega el papel de una **tabla**.
2. Si el dominio es un conjunto infinito (“continuo”) es imposible representar todos los puntos de la gráfica así que recurrimos a representar unos pocos y “unirlos”.
3. ¿Es correcto hacer esto?
4. La representación es **necesariamente aproximada**; la curva tiene grosor, la resolución de cualquier sistema de representación físico es siempre finita, no podemos extender los ejes hasta el infinito...
5. ¿Podemos superar, aunque sea parcialmente, estas limitaciones? (veremos el *método de la lupa*).
6. **Aviso:** es peligroso dejarse llevar por las representaciones gráficas en matemáticas pero si tenemos cuidado podemos entender muchas cosas...

Continuidad de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Definición de función continua de variable real

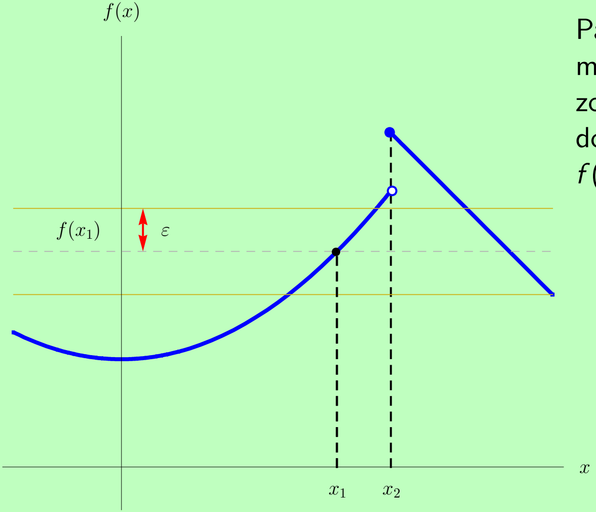


Para simplificar elegiré como dominio todo $\mathbb{R}$ pero el razonamiento se extiende sin dificultad a funciones con otros tipos de dominios.

Tomemos $x_1 \in \mathbb{R}$.

Continuidad de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

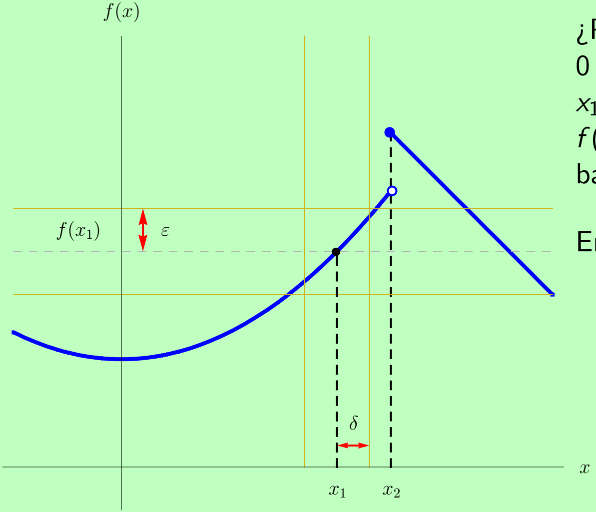
Definición de función continua de variable real



Para un $\varepsilon > 0$ dado tomemos una banda horizontal centrada alrededor de $f(x_1)$ que vaya de $f(x_1) - \varepsilon$ a $f(x_1) + \varepsilon$.

Continuidad de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Definición de función continua de variable real

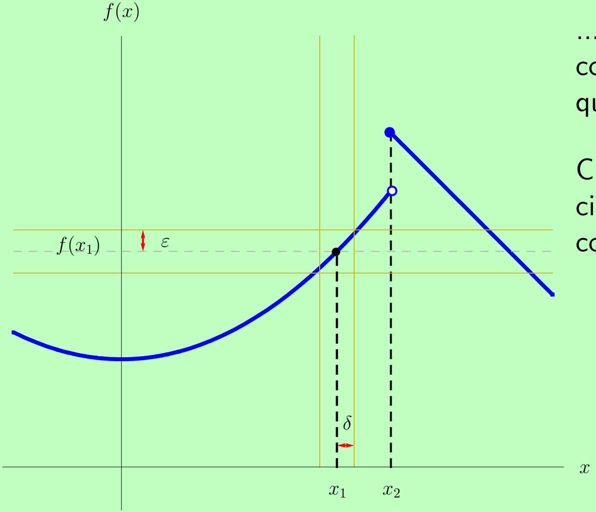


¿Podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si x dista de x_1 menos que δ entonces $f(x)$ está contenido en la banda anterior?

En este caso sí...

Continuidad de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Definición de función continua de variable real

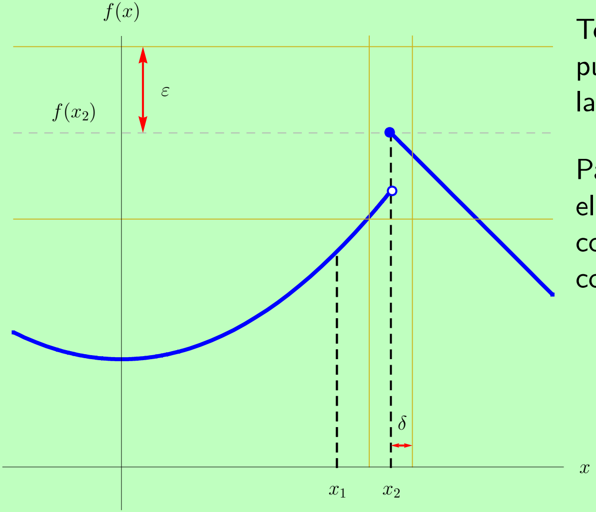


... además, podemos conseguirlo para cualquier valor de ε.

Cuando sucede esto decimos que la función es continua en x_1

Continuidad de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Definición de función continua de variable real

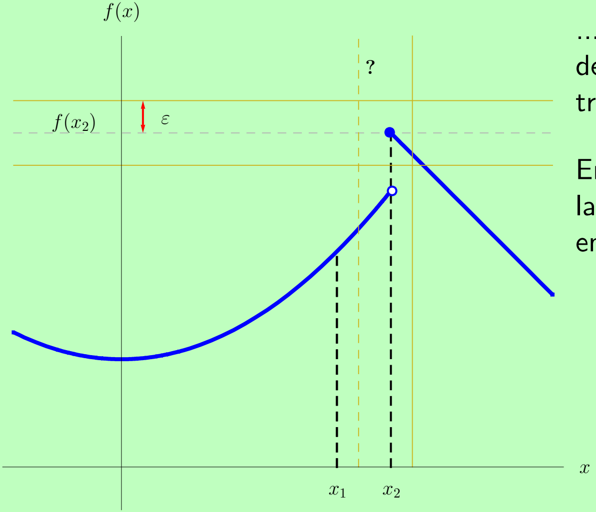


Tomemos ahora otro punto x_2 del dominio de la función.

Para el valor de $\varepsilon > 0$ elegido ahora puedo encontrar un δ que funciona como antes...

Continuidad de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Definición de función continua de variable real



...pero si elijo otro valor de ε ya no puedo encontrar el δ deseado.

En este caso decimos que la función no es continua en x_2

Comentarios

1. $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, \, x \neq x_0 \rightsquigarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$
2. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 cuando $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. Decimos que la función es continua en $\mathbb{R}$ si lo es en cada $x \in \mathbb{R}$.

4. Desde un punto de vista más abstracto, para hablar de continuidad tenemos que introducir un tipo nuevo de estructura: **una topología**.
5. En la recta real existe una **topologia usual** tan sencilla que podemos eludir el punto de vista abstracto hasta cierto punto.
6. Dada una función concreta, para ver que es continua en un punto estamos obligados a demostrar que dado un $\varepsilon > 0$ existe el δ requerido.
7. Afortunadamente en muchas ocasiones es posible ver la continuidad "directamente", en particular para las **funciones elementales** y otras muchas definidas por los procedimientos que mencioné antes.

Derivabilidad de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Definición de derivada

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0 entonces definimos la derivada de f en x_0 como:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Si este límite existe podemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ se cumple

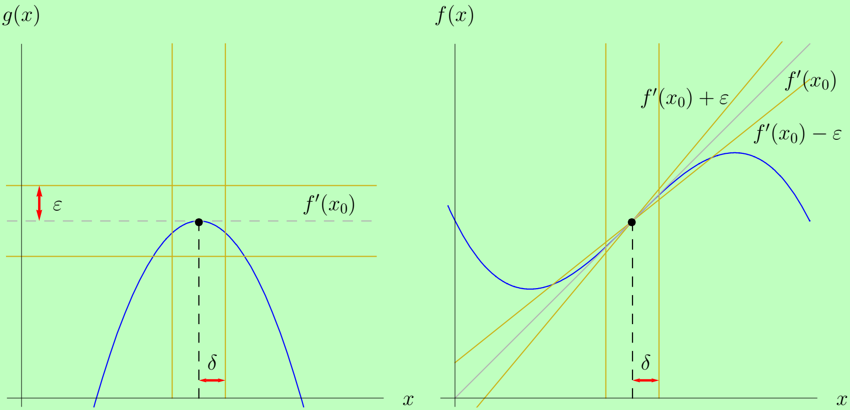
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon |x - x_0| \\ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \varepsilon |x - x_0| \end{array}}$$

Definamos también la función (continua en x_0) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

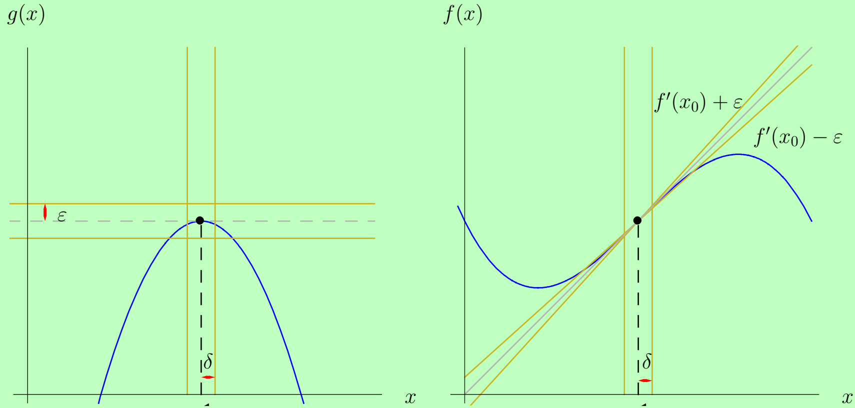
$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\[2ex] f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

Derivabilidad de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Definición de derivada

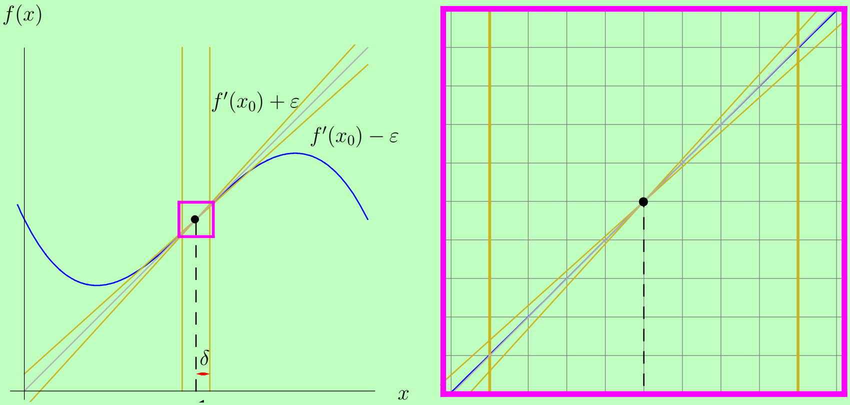


Definición de derivada



Derivabilidad de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Definición de derivada



Comentarios

1. He definido la derivabilidad en un punto. Una función definida sobre $\mathbb{R}$ es derivable si lo es en todos los puntos.
2. La derivabilidad es una condición **más fuerte** que la continuidad.
3. Es fácil encontrar funciones **continuas** pero **no derivables** en algunos puntos sueltos, por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x| = +\sqrt{x^2}$.

5. La derivabilidad implica que existe una recta tangente (la mejor aproximación lineal).
6. La continuidad es **condición necesaria** para la derivabilidad (una función derivable en un punto x_0 es continua en x_0).
7. Cualquier función que se defina con "las reglas del colegio" (ejemplo: $f(x) = \arctan \sin x + \arctan \csc x$) es continua y derivable en *casi todos* sus puntos.
8. **¿Es posible definir una función que sea continua en todos los puntos de un intervalo pero no sea derivable en ninguno?**

La función de Takagi

Sumas y series de funciones

$$f_1 : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f_1(x)$$
$$f_2 : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f_2(x)$$

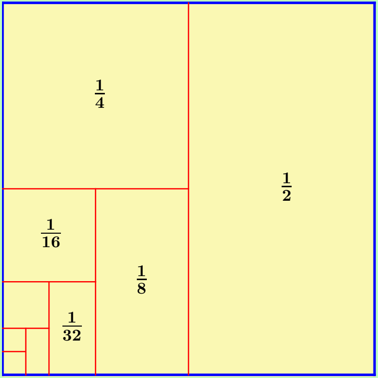
definimos su suma como

$$f_1 + f_2 : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f_1(x) + f_2(x).$$

Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una lista de funciones reales, todas con el mismo dominio. Puedo definir su "suma infinita" como

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

siempre que tenga sentido.

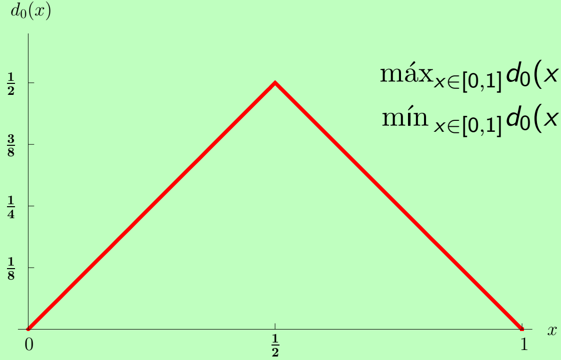


$$\boxed{1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots}$$

La función de Takagi

1. Definimos unas funciones d_0, d_1, d_2,... de la siguiente manera

$$\boxed{d_k : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto d_k(x) := \frac{1}{2^k}\mathrm{dist}(2^k x, \mathbb{Z})} \quad k = 0, 1, \ldots$$

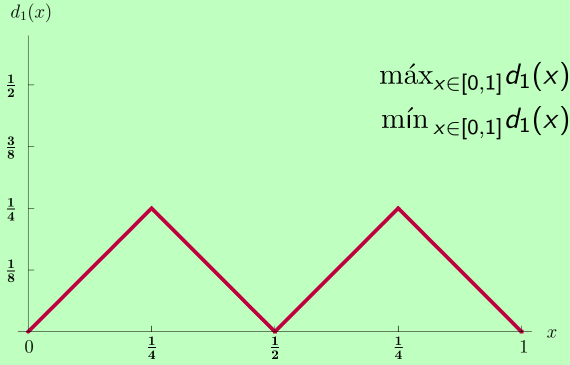


$$\max_{x\in[0,1]} d_0(x) = 1/2^1$$
$$\min_{x\in[0,1]} d_0(x) = 0$$

La función de Takagi

1. Definimos unas funciones d_0, d_1, d_2,... de la siguiente manera

$$\boxed{d_k : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto d_k(x) := \frac{1}{2^k}\mathrm{dist}(2^k x, \mathbb{Z})} \quad k = 0, 1, \ldots$$

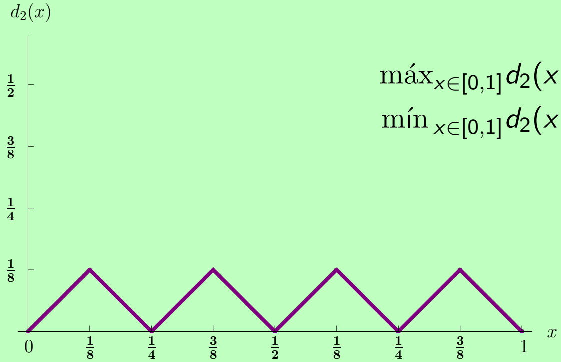


$$\max_{x\in[0,1]} d_1(x) = 1/2^2$$
$$\min_{x\in[0,1]} d_1(x) = 0$$

La función de Takagi

1. Definimos unas funciones d_0, d_1, d_2,... de la siguiente manera

$$\boxed{d_k : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto d_k(x) := \frac{1}{2^k}\mathrm{dist}(2^k x, \mathbb{Z})} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

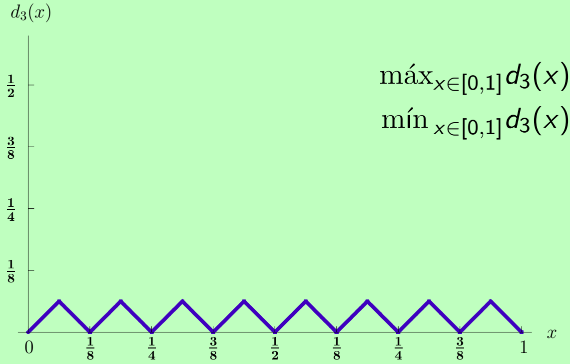


$$\max_{x\in[0,1]} d_2(x) = 1/2^3$$
$$\min_{x\in[0,1]} d_2(x) = 0$$

La función de Takagi

1. Definimos unas funciones d_0, d_1, d_2,... de la siguiente manera

$$\boxed{d_k : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto d_k(x) := \frac{1}{2^k}\mathrm{dist}(2^k x, \mathbb{Z})} \quad k = 0, 1, \dots$$

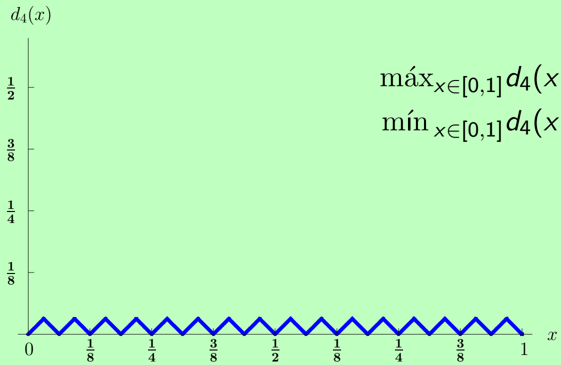


$$\text{máx}_{x\in[0,1]} d_3(x) = 1/2^4$$
$$\text{mín}_{x\in[0,1]} d_3(x) = 0$$

La función de Takagi

1. Definimos unas funciones d_0, d_1, d_2,... de la siguiente manera

$$\boxed{d_k : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto d_k(x) := \frac{1}{2^k}\operatorname{dist}(2^k x, \mathbb{Z})} \quad k = 0, 1, \ldots$$

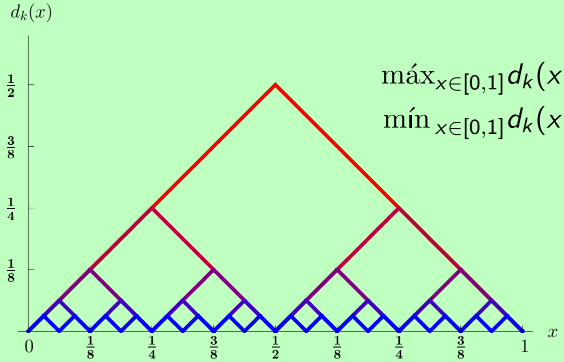


$$\text{máx}_{x\in[0,1]} d_4(x) = 1/2^5$$
$$\text{mín}_{x\in[0,1]} d_4(x) = 0$$

La función de Takagi

1. Definimos unas funciones d_0, d_1, d_2,... de la siguiente manera

$$\boxed{d_k : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto d_k(x) := \frac{1}{2^k}\operatorname{dist}(2^k x, \mathbb{Z})} \qquad k = 0, 1, \ldots$$



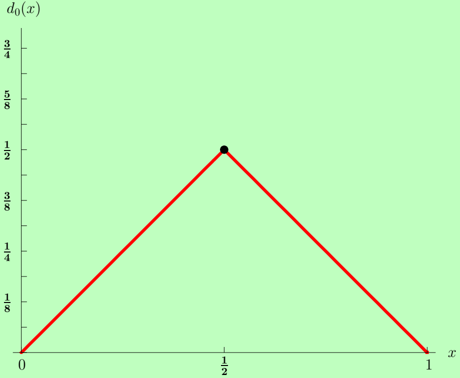
$$\max_{x\in[0,1]} d_k(x) = 1/2^{k+1}$$

$$\min_{x\in[0,1]} d_k(x) = 0$$

La función de Takagi

2. La función de Takagi es $\boxed{T : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)}$
3. Veamos como se calcula $T(x)$ para algunos valores concretos de x.

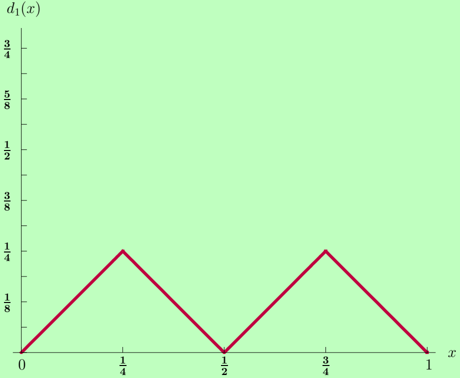
$\boxed{T(1/2) = 1/2}$



La función de Takagi

2. La función de Takagi es $$\boxed{T : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)}$$
3. Veamos como se calcula $T(x)$ para algunos valores concretos de x.

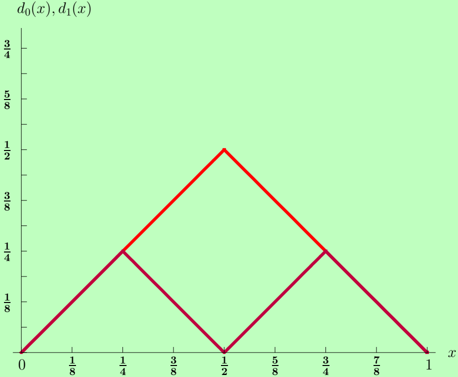
$$\boxed{T(1/2) = 1/2}$$



La función de Takagi

2. La función de Takagi es $$\boxed{T : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)}$$
3. Veamos como se calcula $T(x)$ para algunos valores concretos de x.

$$\boxed{T(1/2) = 1/2}$$

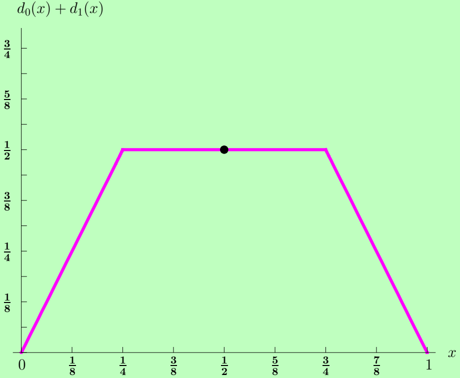


La función de Takagi

2. La función de Takagi es $\boxed{T : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)}$

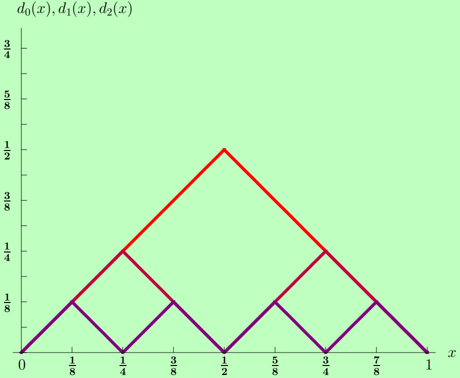
3. Veamos como se calcula $T(x)$ para algunos valores concretos de x.

$\boxed{T(1/2) = 1/2}$



2. La función de Takagi es $$\boxed{T : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)}$$
3. Veamos como se calcula $T(x)$ para algunos valores concretos de x.

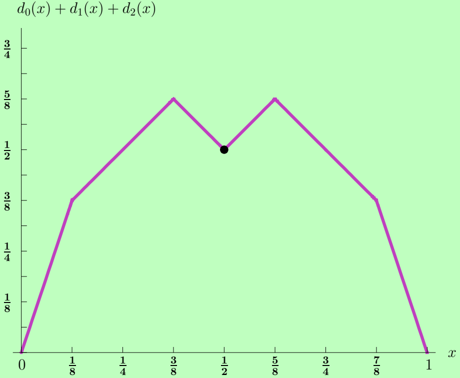
$$\boxed{T(1/2) = 1/2}$$



La función de Takagi

2. La función de Takagi es $\boxed{T : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)}$
3. Veamos como se calcula $T(x)$ para algunos valores concretos de x.

$\boxed{T(1/2) = 1/2}$



La función de Takagi

Evaluando la función de Takagi

4. $T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{2}$
5. $T(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{2}$
6. $T(\frac{1}{16}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + 0 + \cdots = \frac{1}{4}$
7. Muy fácil, ¿no? En general $T(x)$ viene dado por una suma finita si x es un número racional que en forma irreducible sea de la forma $x = a/2^k$ con $a \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$).

8. Como los números de esta forma "llenan densamente" el intervalo $[0, 1]$ podemos calcular muy fácilmente la función T para un subconjunto que "llena el dominio dejando huecos muy pequeños".

La función de Takagi

¿Qué sucede en otros puntos?

10. $T(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = \frac{2}{3}$
11. $T(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5}\left(1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = \frac{8}{15}$
12. $T(\frac{1}{7}) = \frac{1}{7}\left[2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \quad \cdots \quad + \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \quad \cdots \quad\right)\right] = \frac{22}{49}$
13. Para valores racionales distintos de los de la forma $a/2^k$ hay que calcular series (sumas) infinitas sencillas (serie geométrica).

14. En algunos casos es posible obtener de forma cerrada $T(x)$, por ejemplo, para algunos números de la forma $\vartheta_3(0, a)$ con $a \in \mathbb{Q}$ (ϑ_3 es una de las funciones theta elípticas de Jacobi).

La función de Takagi

Una propiedad de aproximación de la gráfica

Como no podemos sumar infinitas funciones fácilmente, para aproximar la función T tomemos sólo los $p+1$ primeros términos de la serie

$$\boxed{T_p := \sum_{k=0}^{p} d_k}$$

Si en lugar de calcular la suma de las infinitas funciones d_k nos quedamos con un número finito N de términos el error que cometemos (siempre por defecto porque las funciones d_k son positivas) es menor o igual que $1/2^N$.

$$\boxed{0 \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} d_k \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{p+1}}}$$

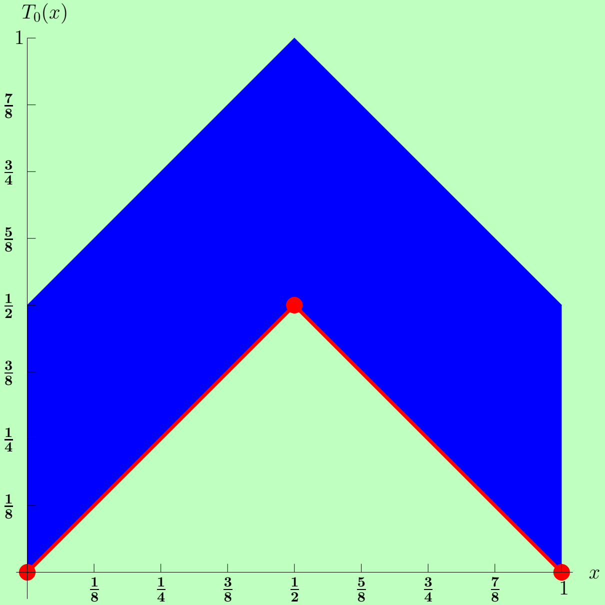
Además, sabemos que para los puntos de la forma $a/2^{p+1}$ con $a \in \mathbb{N}^*$ el valor obtenido al mediante la función truncada T_p es el valor exacto de la función en $a/2^{p+1}$. Esta es una **acotación uniforme del error**.

La función de Takagi

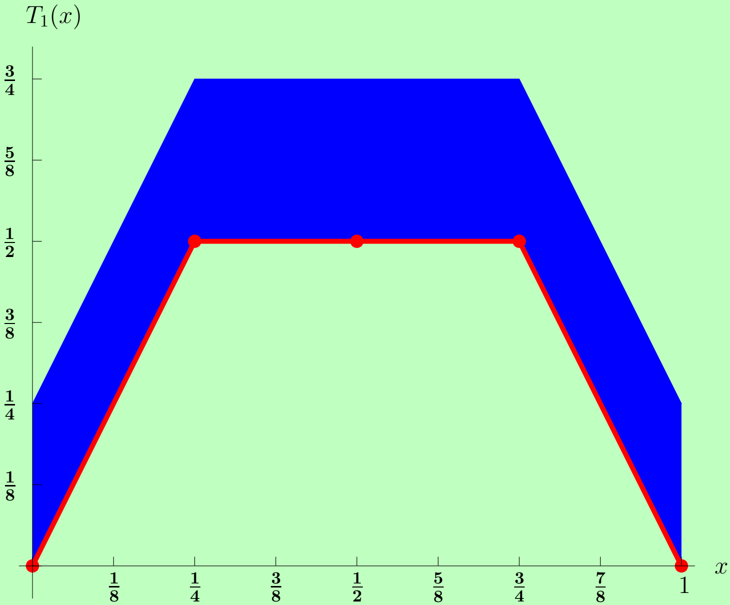
Veamos como es la función de Takagi...

1. Voy a representar las aproximaciones sucesivas T_p a la función.
2. En cada gráfica voy a señalar (puntos rojos) aquellos valores de la función que son exactos.
3. En cada gráfica se muestra una banda azul que corresponde a la estimación del error de truncamiento que hice antes. Sabemos que todos los puntos de la gráfica de la función T están en estas bandas.
4. La frontera inferior de cada banda representa la aproximación T_p.

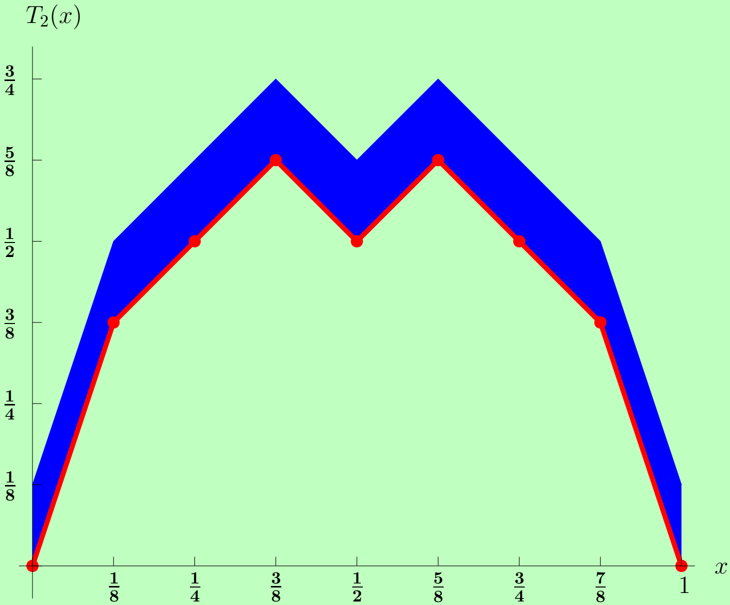
Veamos como es la función de Takagi...



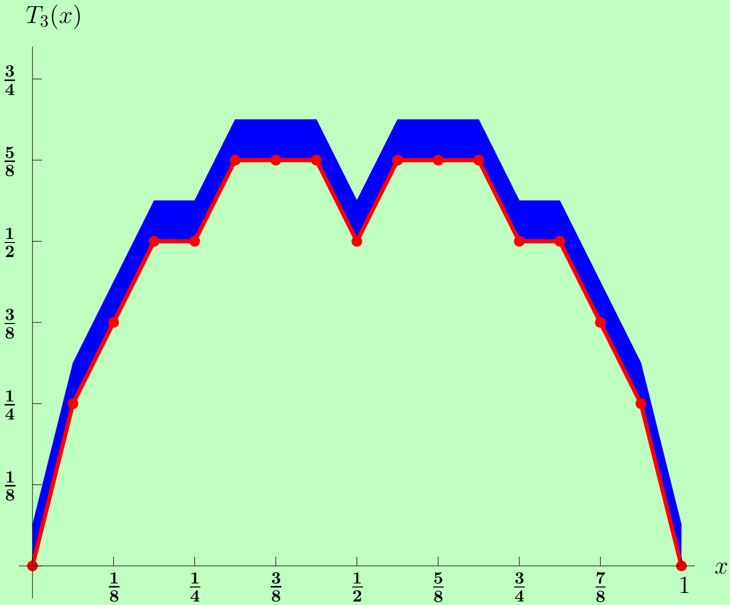
Veamos como es la función de Takagi...



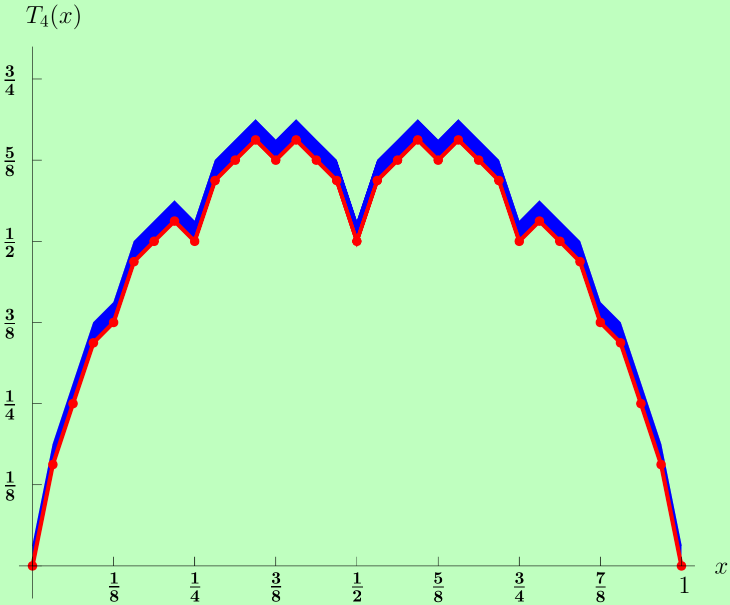
Veamos como es la función de Takagi...



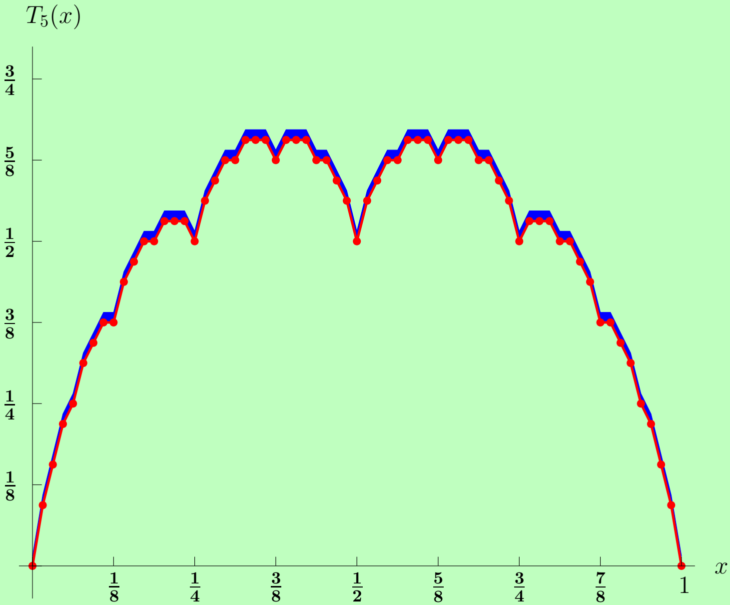
Veamos como es la función de Takagi...



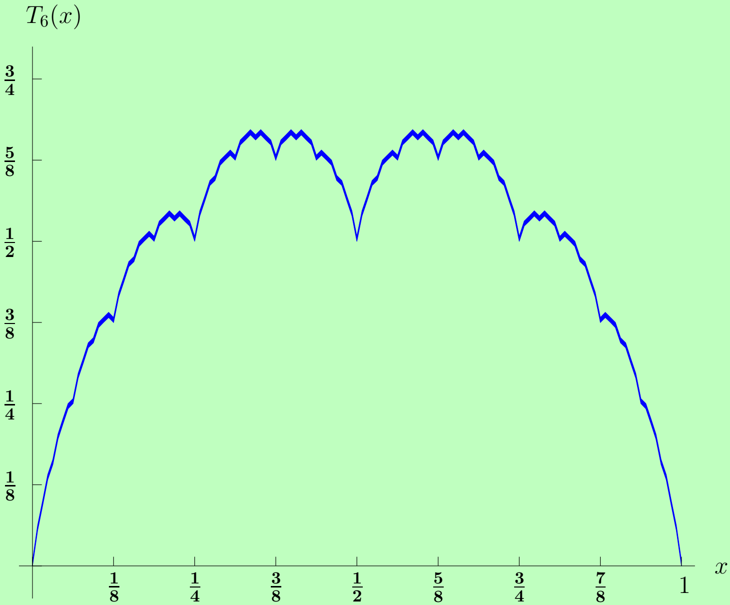
Veamos como es la función de Takagi...



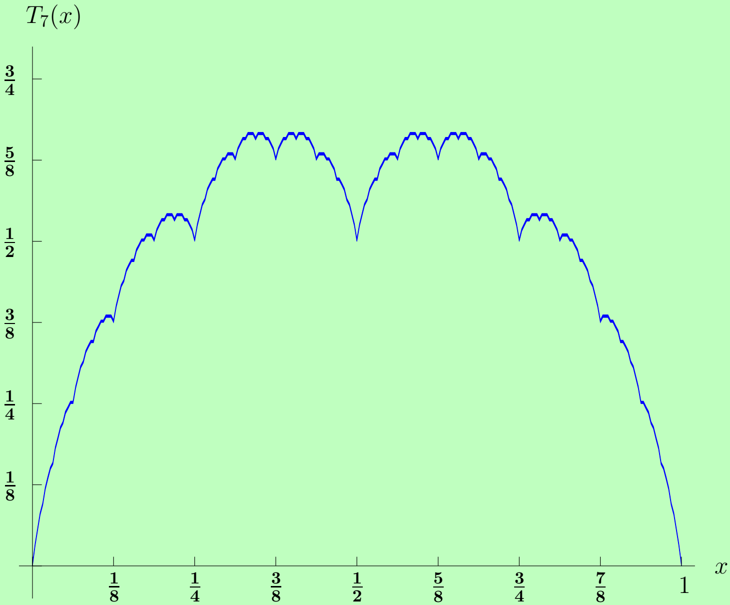
Veamos como es la función de Takagi...



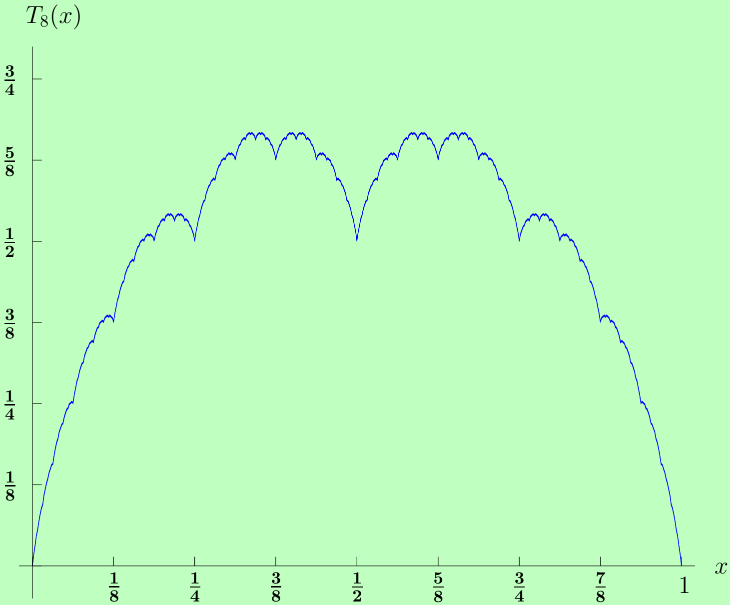
Veamos como es la función de Takagi...



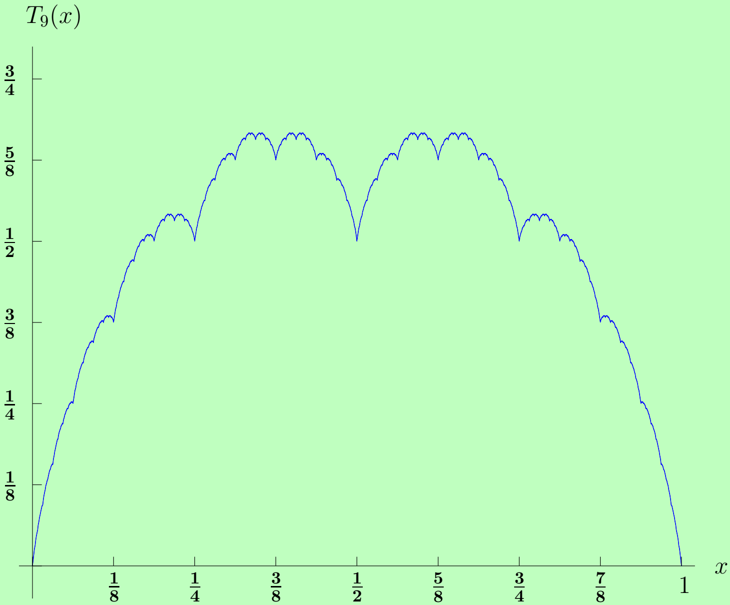
Veamos como es la función de Takagi...



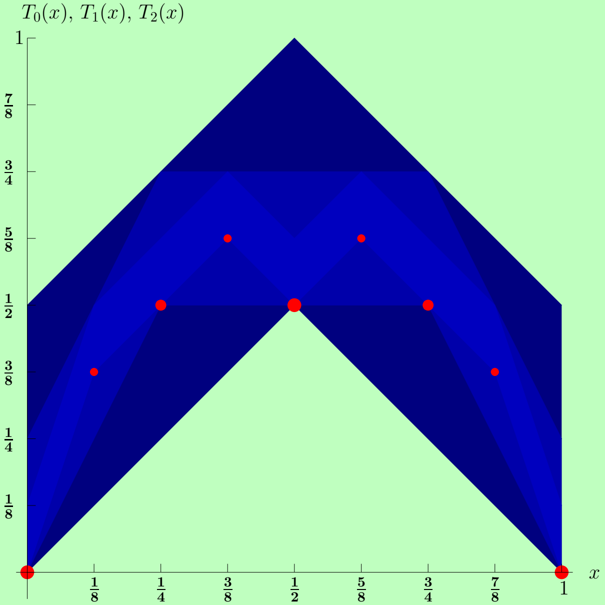
Veamos como es la función de Takagi...



Veamos como es la función de Takagi...



Veamos como es la función de Takagi...



Comentarios sobre continuidad y derivabilidad

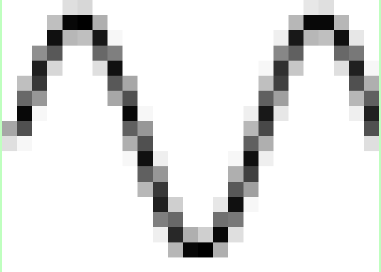
2. ¿Es T una función **continua**?
   La forma en la que las aproximaciones T_p se aproximan a T recibe un nombre especial: **convergencia uniforme**.
   La convergencia uniforme tiene una consecuencia muy interesante para nosotros (debido a que las funciones d_k son continuas en $[0,1]$):
   La función de Takagi es continua en $[0,1]$.
3. ¿Es T una función **derivable** en algún punto de su dominio?:

   ¡No!

4. Es fácil probar esto en los puntos de la forma $a/2^k$ y es cierto en todos los puntos del intervalo $[0,1]$.
   La demostración no es difícil pero no es completamente trivial.
   No la haré aquí.
5. Aunque el resultado parece obvio no es tan evidente.
6. Algo interesante tiene que suceder al mirar con detalle la gráfica de la función de Takagi...

La función de Takagi en detalle

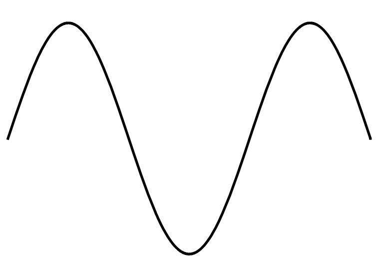
1. ¿Qué pasa si miramos la pantalla con lupa?



2. Cualquier representación es necesariamente aproximada porque:
   - Hay errores de truncamiento en la evaluación de la función.
   - Hay errores en la propia representación gráfica debidos a la resolución finita de la pantalla, o del papel o de lo que sea...
   - Estos también son superables con un poco de ingenio:

Utilicemos una lupa matemática...

1. ¿Qué pasa si miramos la pantalla con lupa?

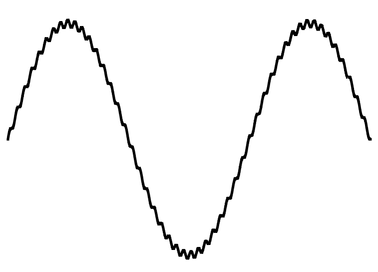


2. Cualquier representación es necesariamente aproximada porque:
   - Hay errores de truncamiento en la evaluación de la función.
   - Hay errores en la propia representación gráfica debidos a la resolución finita de la pantalla, o del papel o de lo que sea...
   - Estos también son superables con un poco de ingenio:

Utilicemos una lupa matemática...

La función de Takagi en detalle

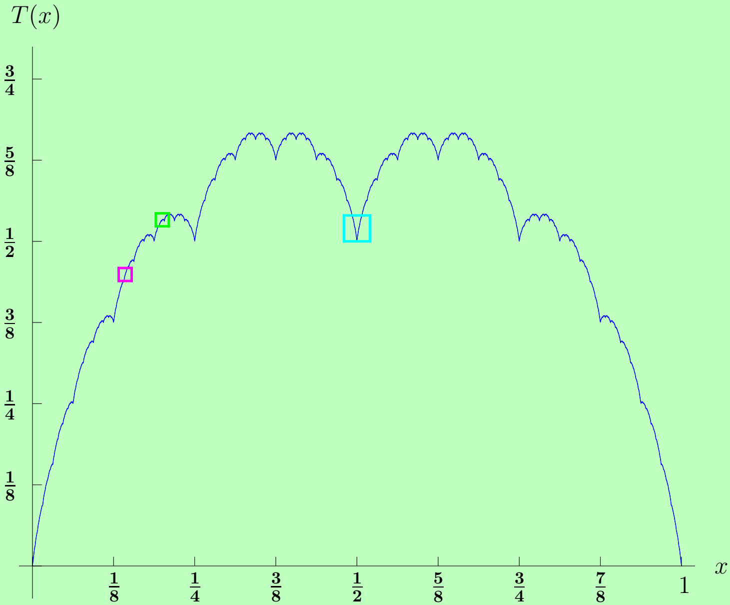
1. ¿Qué pasa si miramos la pantalla con lupa?



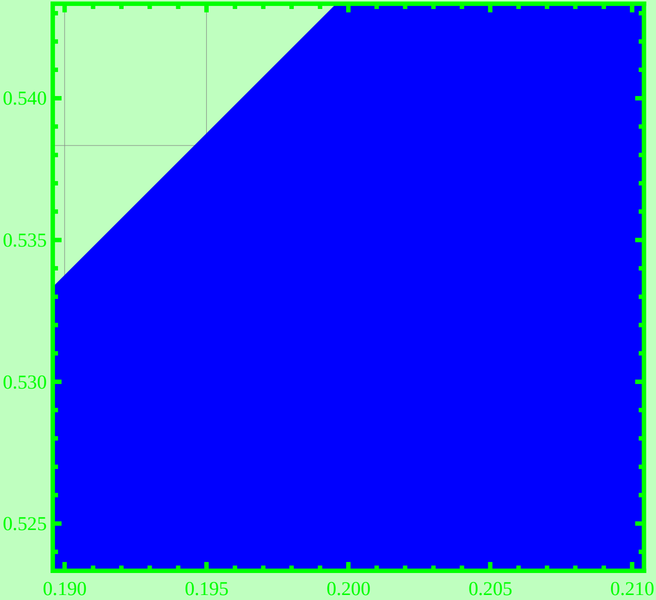
2. Cualquier representación es necesariamente aproximada porque:
   - Hay errores de truncamiento en la evaluación de la función.
   - Hay errores en la propia representación gráfica debidos a la resolución finita de la pantalla, o del papel o de lo que sea...
   - Estos también son superables con un poco de ingenio:

Utilicemos una lupa matemática...

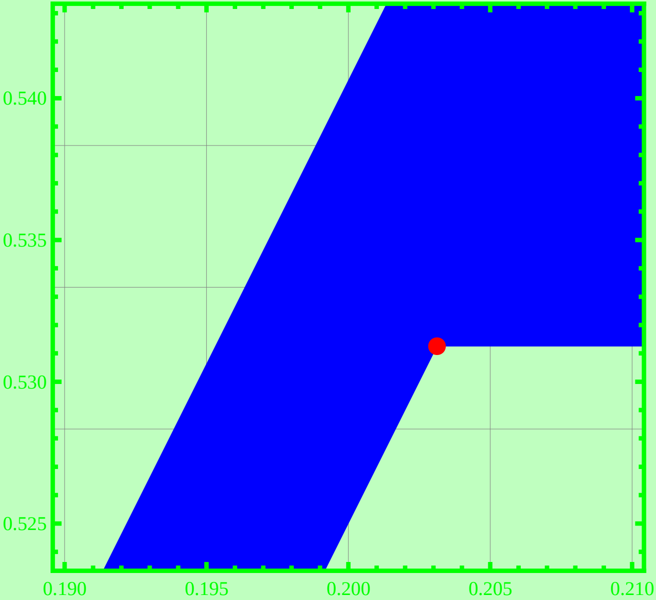
Veamos como es la función de Takagi...



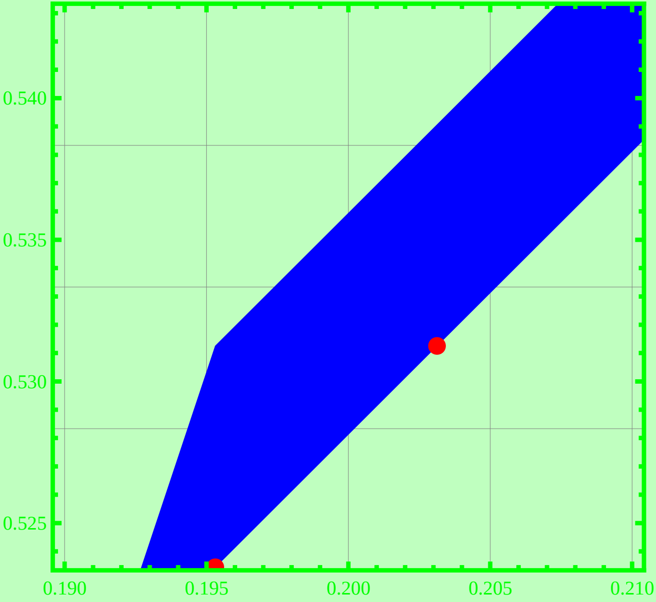
Veamos como es la función de Takagi...



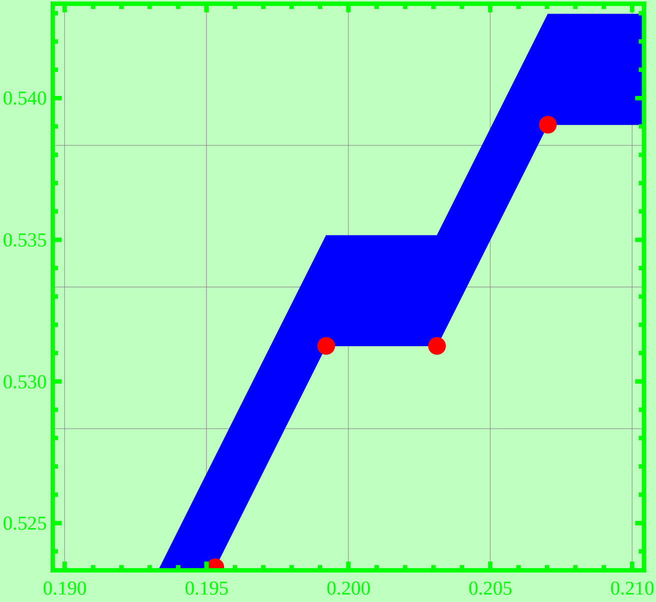
Veamos como es la función de Takagi...



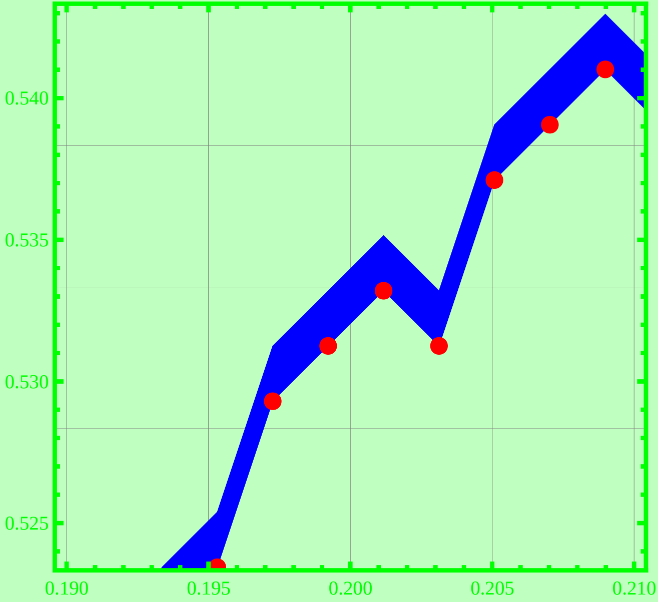
Veamos como es la función de Takagi...



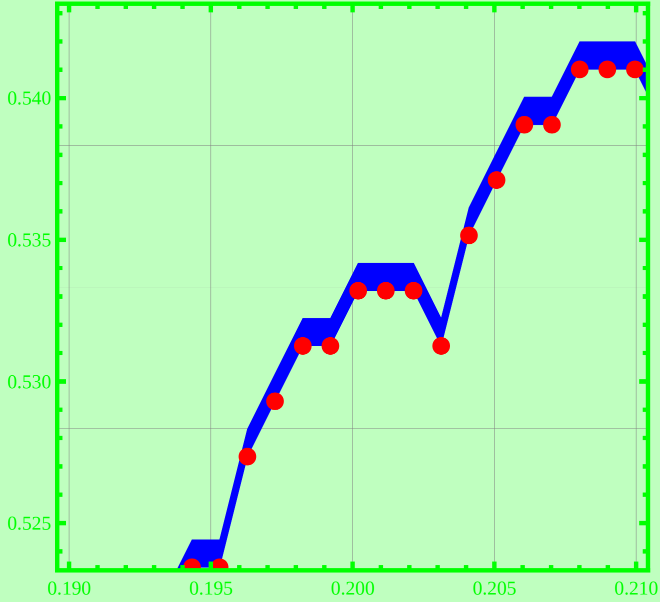
Veamos como es la función de Takagi...



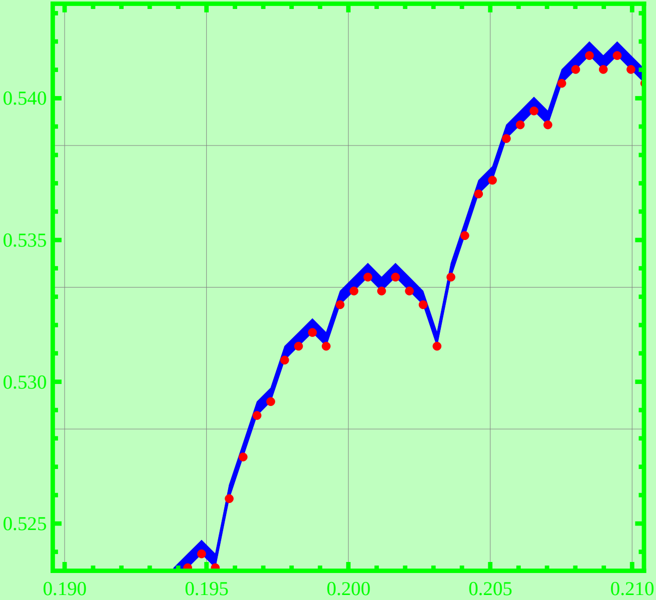
Veamos como es la función de Takagi...



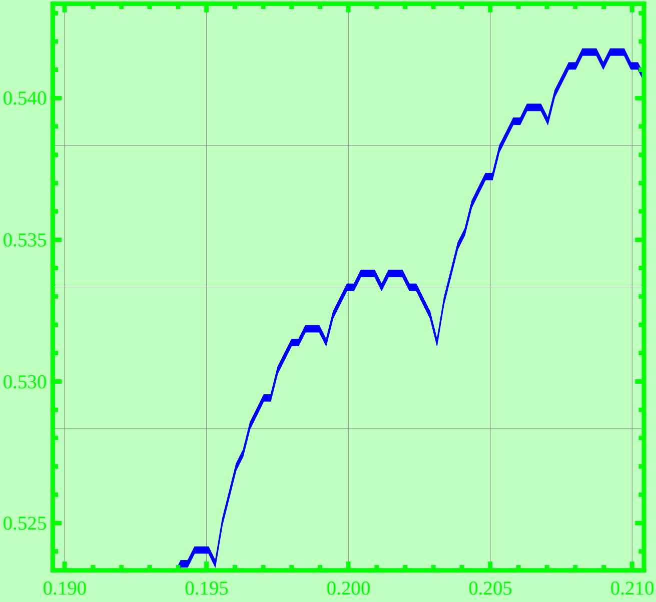
Veamos como es la función de Takagi...



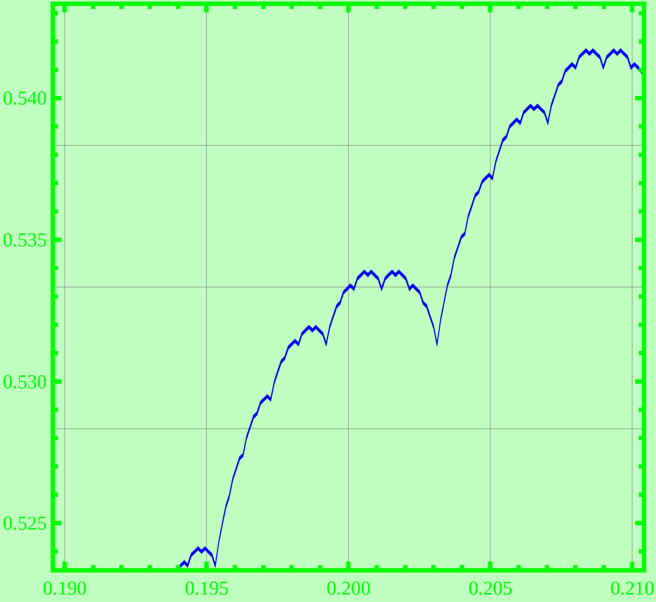
Veamos como es la función de Takagi...



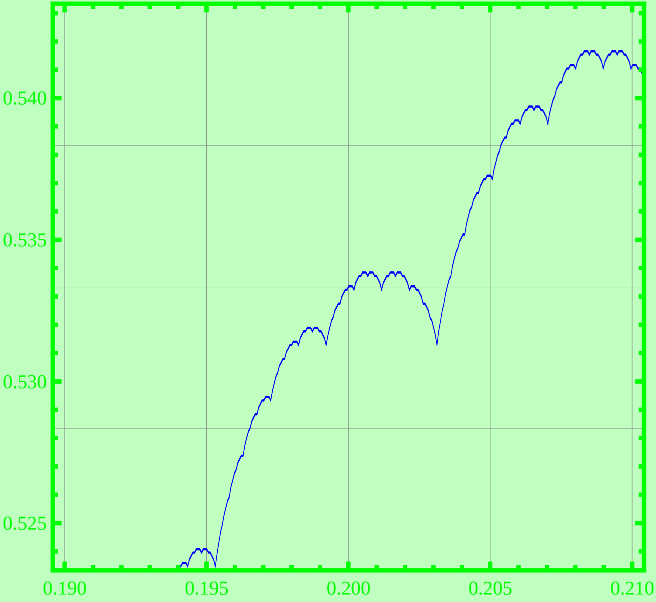
Veamos como es la función de Takagi...



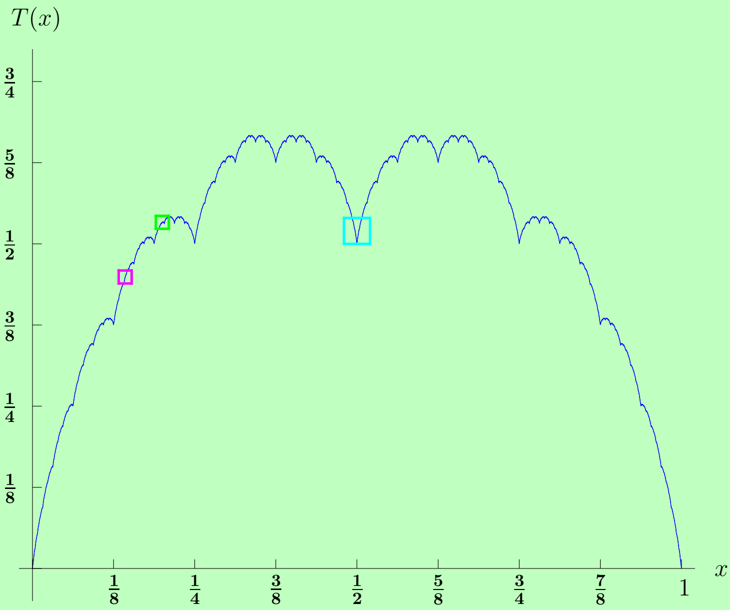
Veamos como es la función de Takagi...



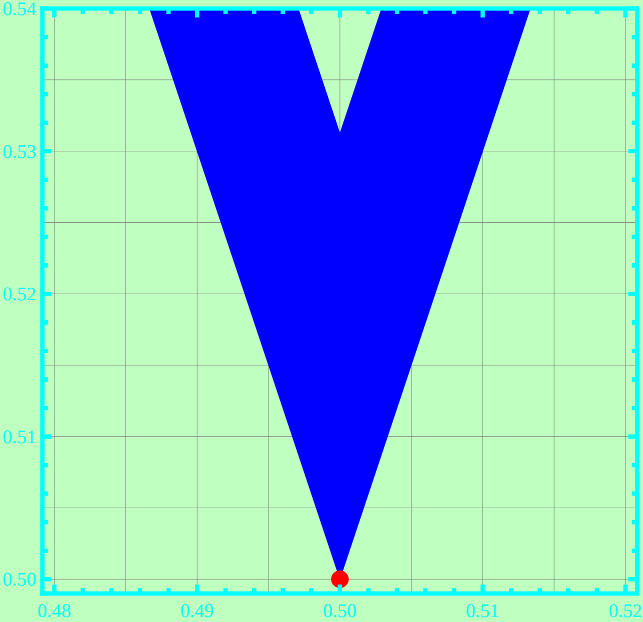
Veamos como es la función de Takagi...



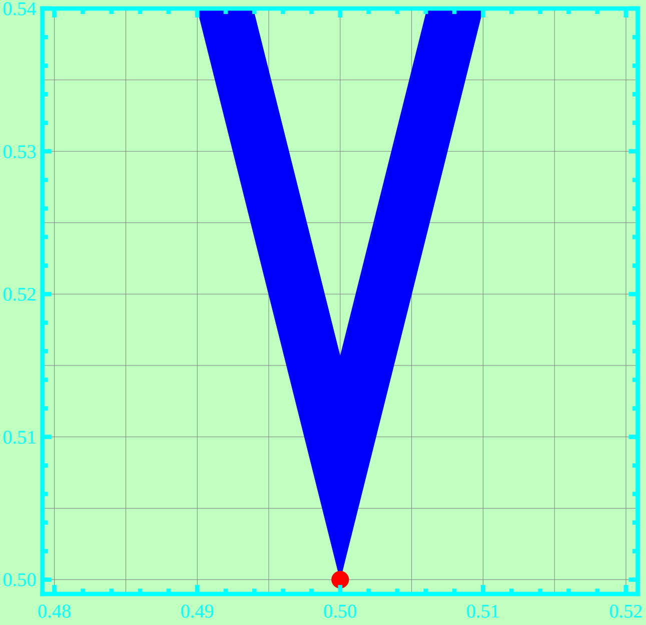
Veamos como es la función de Takagi...



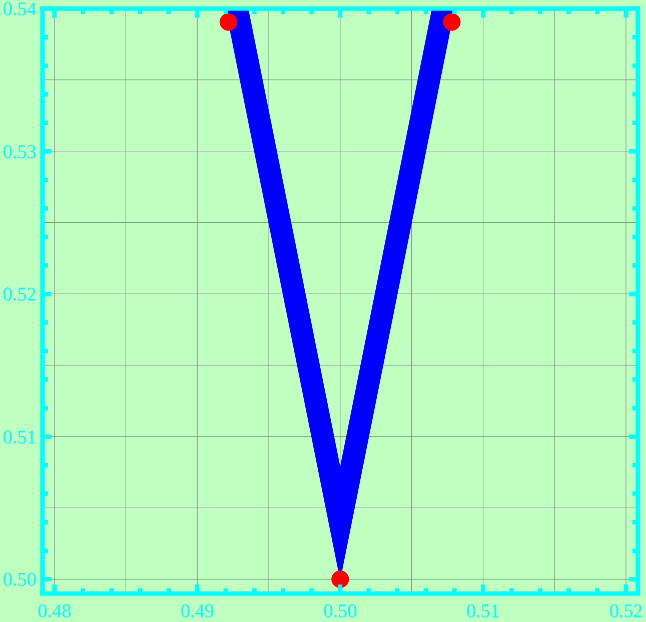
Veamos como es la función de Takagi...



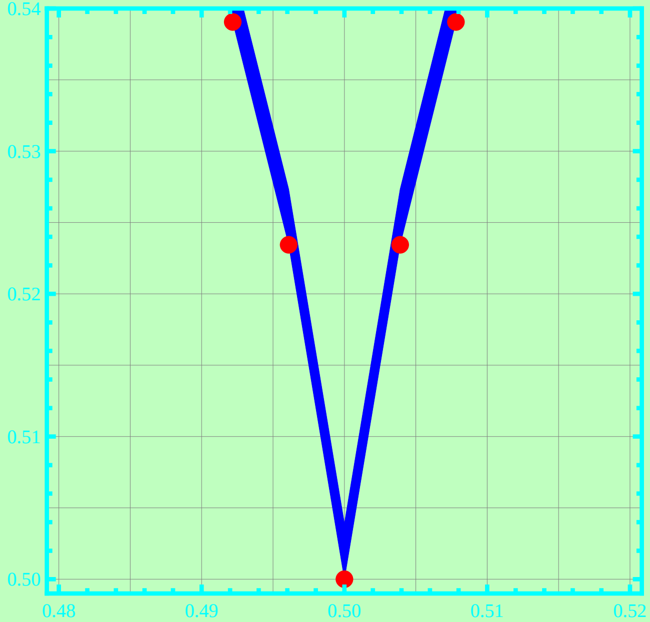
Veamos como es la función de Takagi...



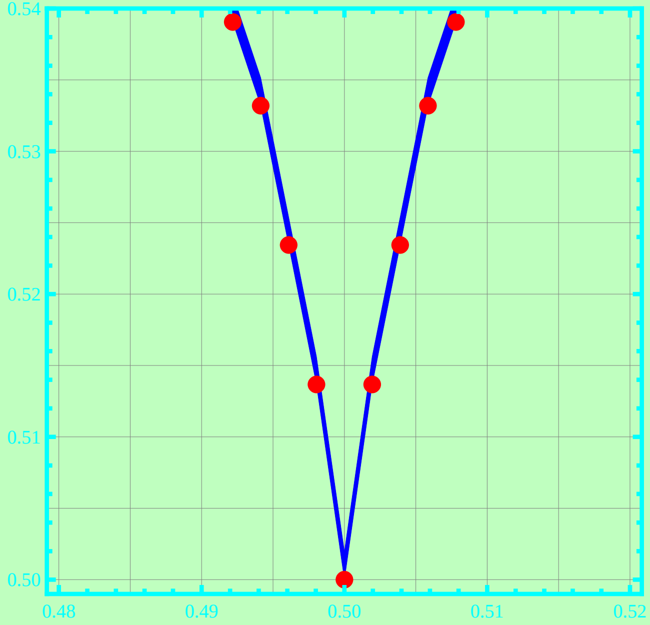
Veamos como es la función de Takagi...



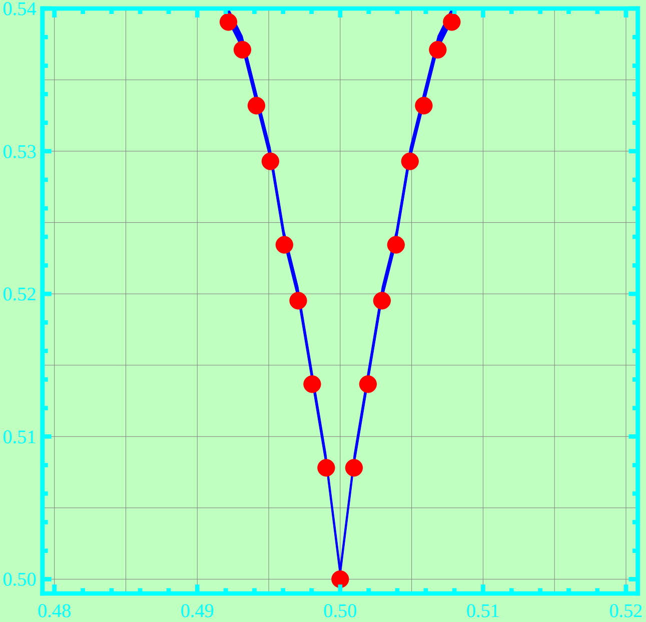
Veamos como es la función de Takagi...



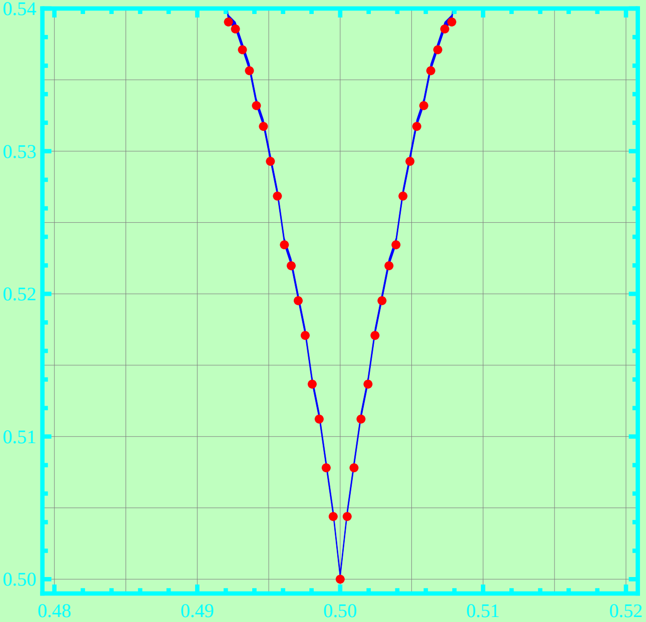
Veamos como es la función de Takagi...



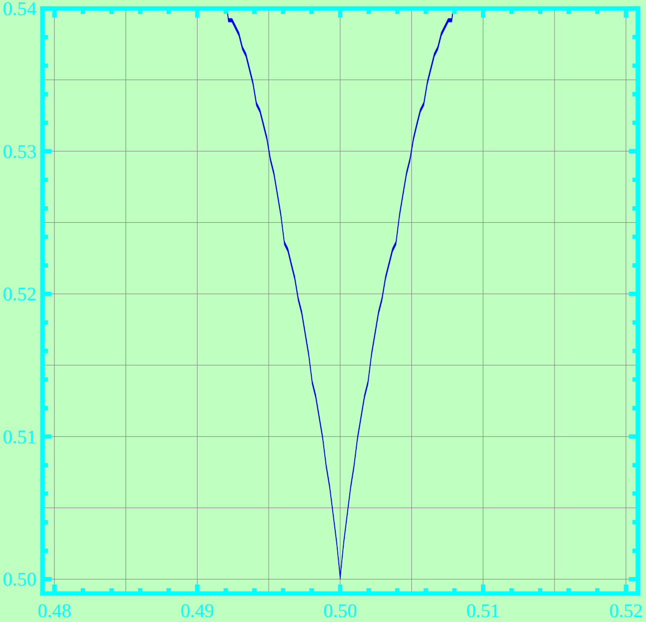
Veamos como es la función de Takagi...



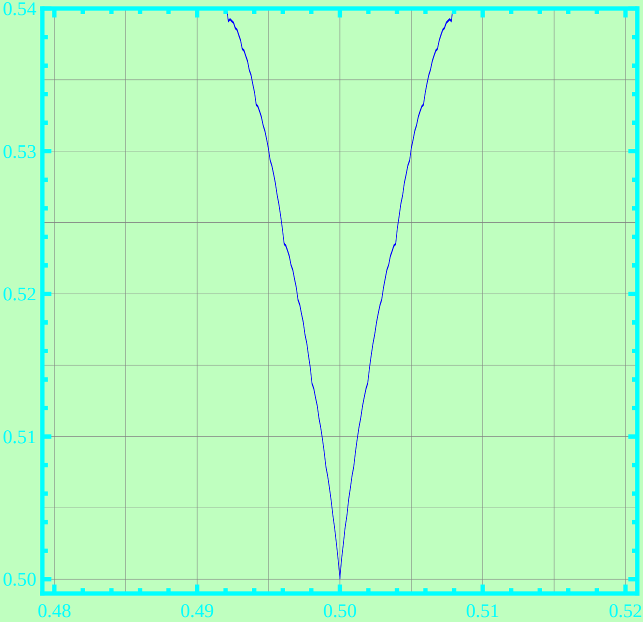
Veamos como es la función de Takagi...



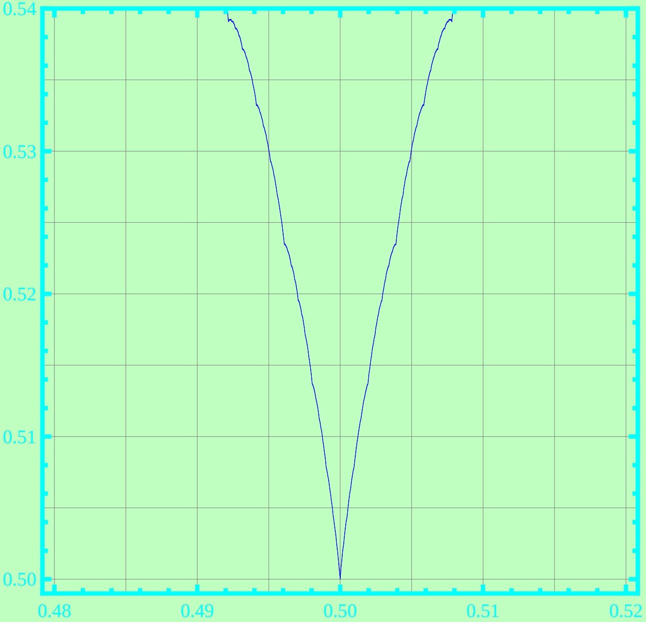
Veamos como es la función de Takagi...



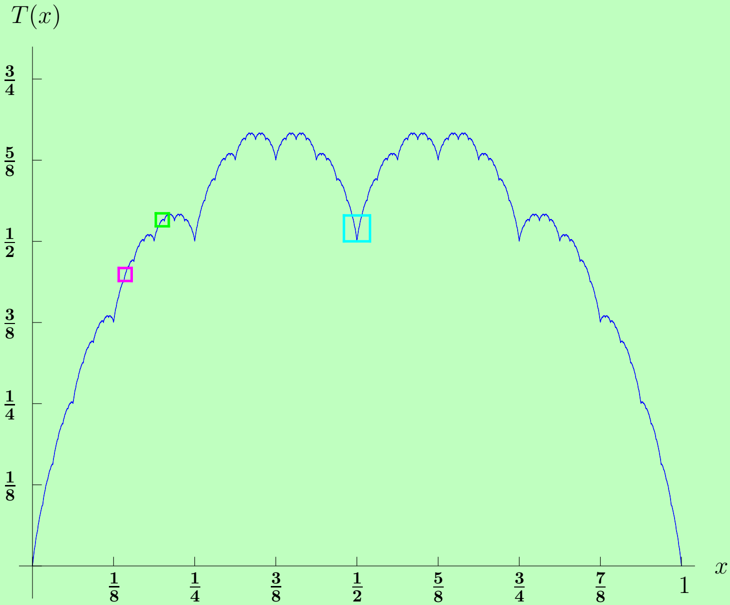
Veamos como es la función de Takagi...



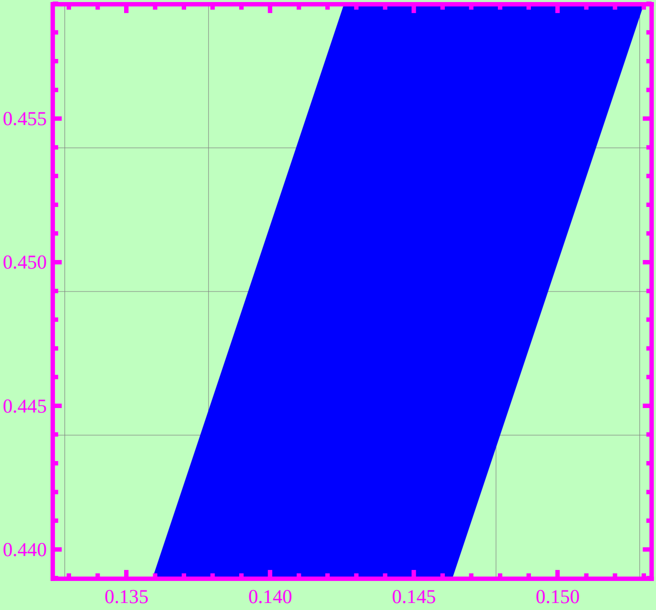
Veamos como es la función de Takagi...



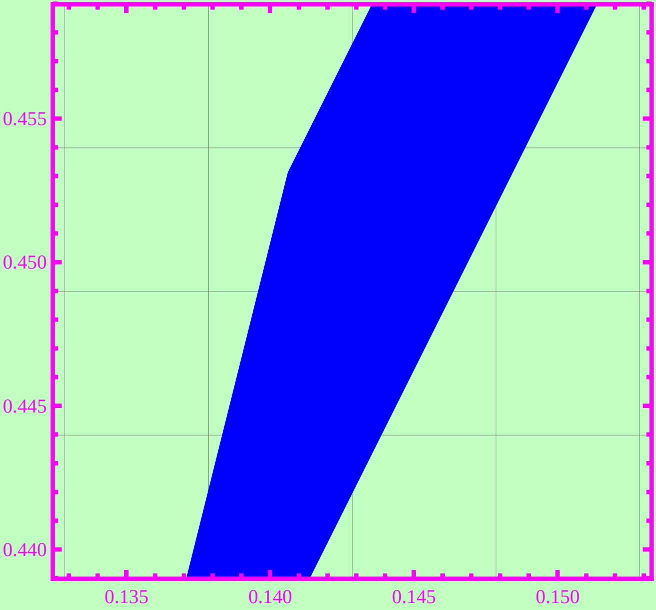
Veamos como es la función de Takagi...



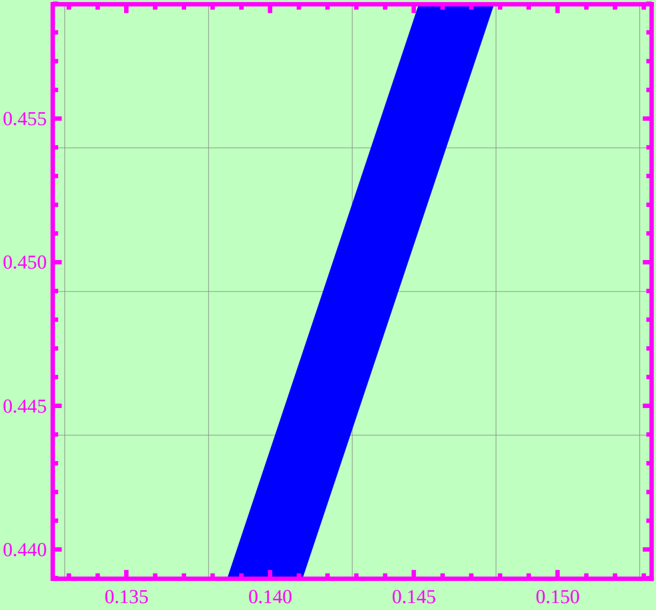
Veamos como es la función de Takagi...



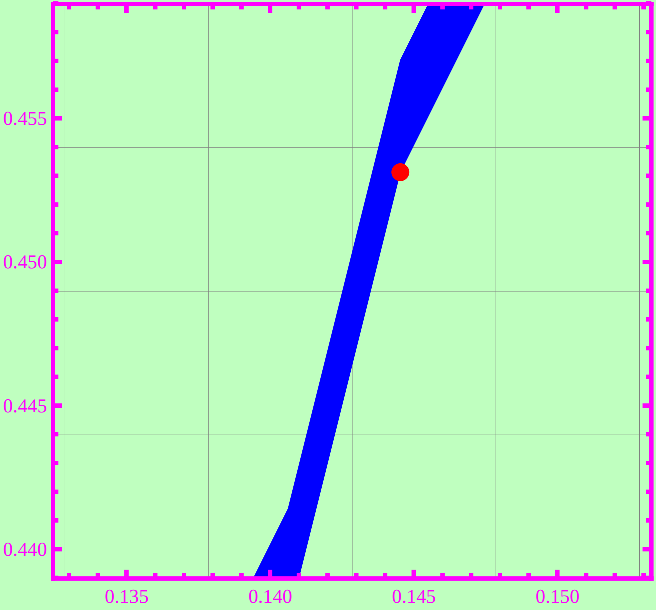
Veamos como es la función de Takagi...



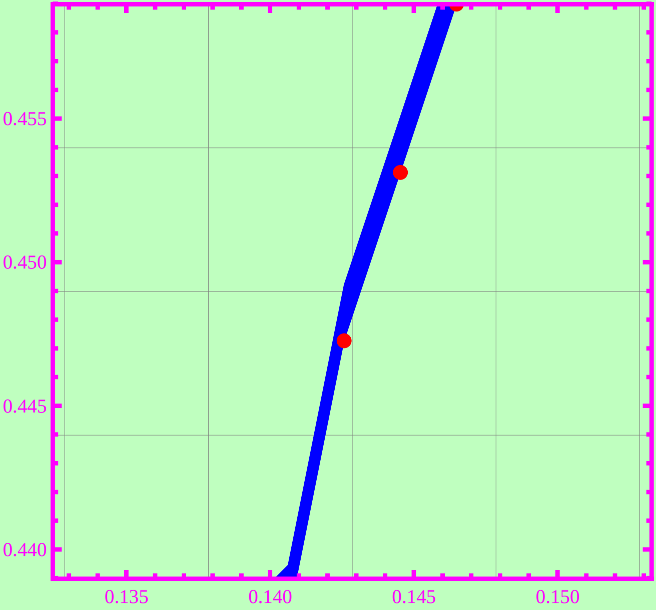
Veamos como es la función de Takagi...



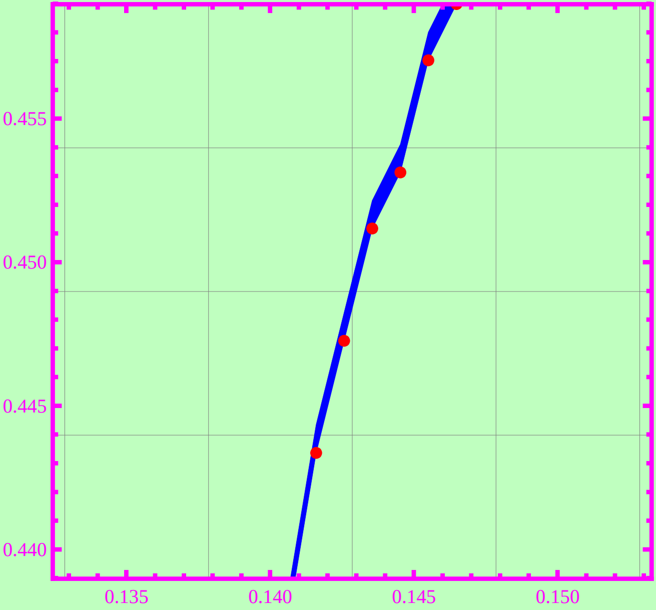
Veamos como es la función de Takagi...



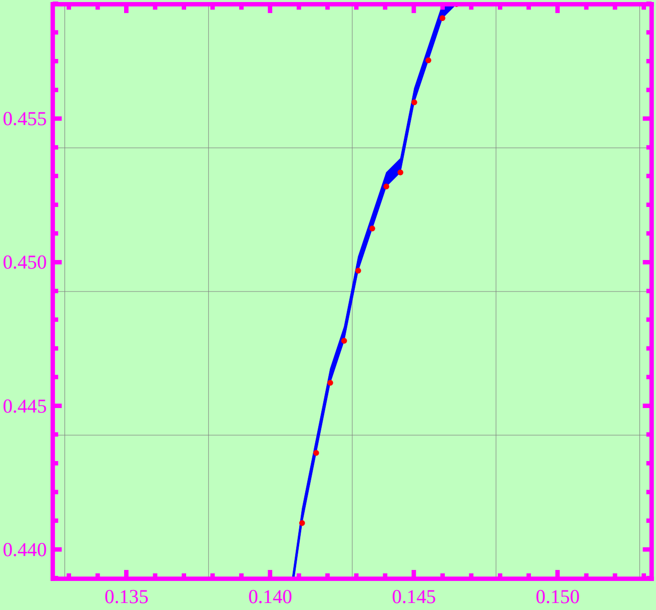
Veamos como es la función de Takagi...



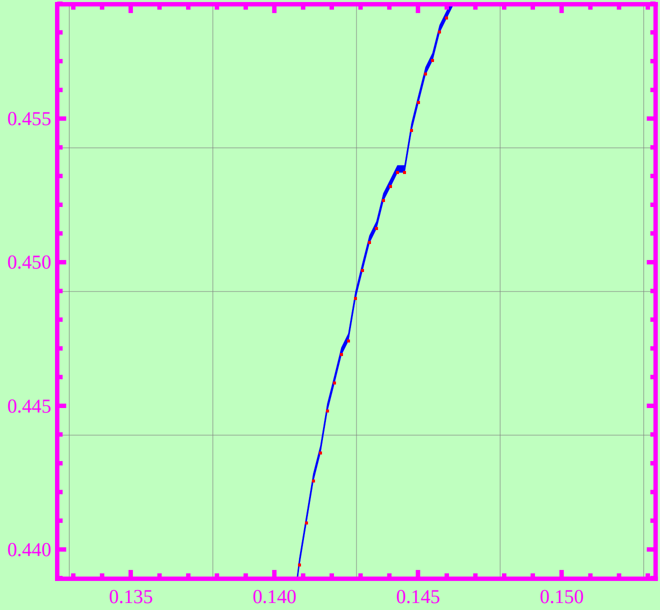
Veamos como es la función de Takagi...



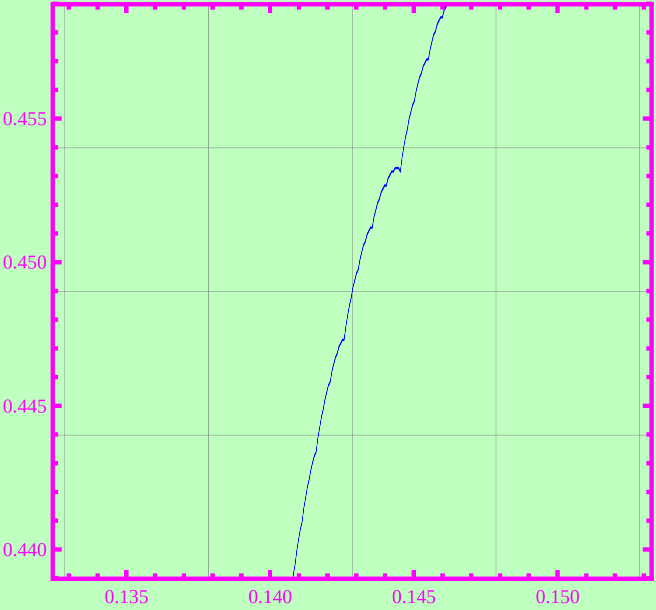
Veamos como es la función de Takagi...



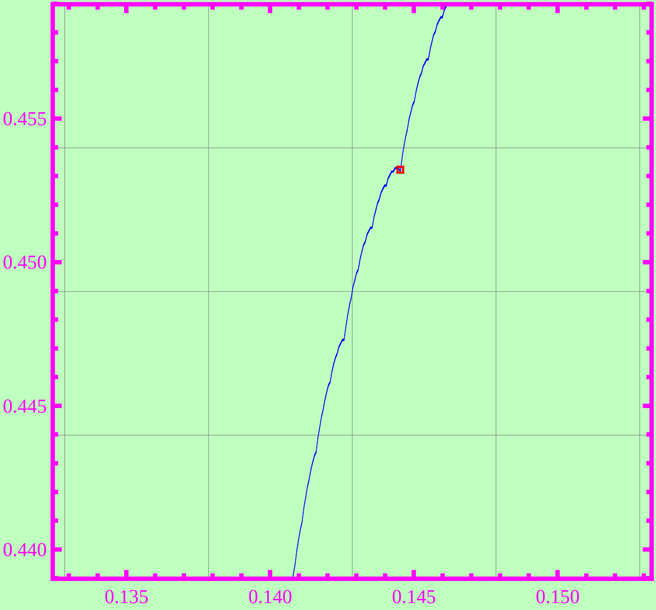
Veamos como es la función de Takagi...



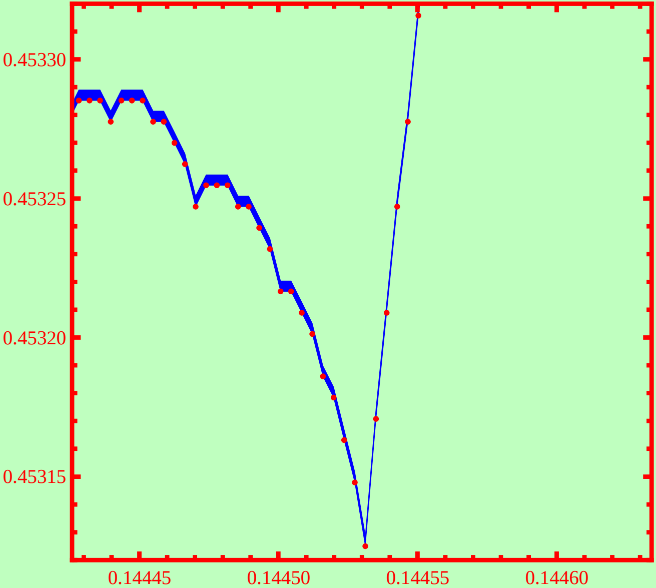
Veamos como es la función de Takagi...



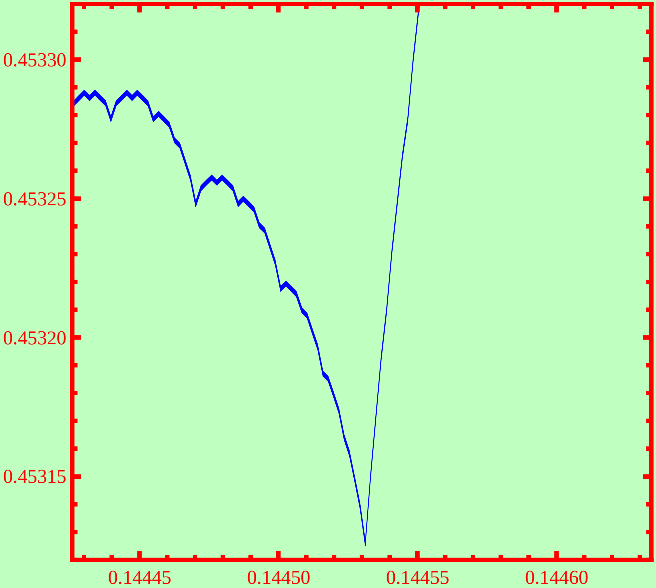
Veamos como es la función de Takagi...



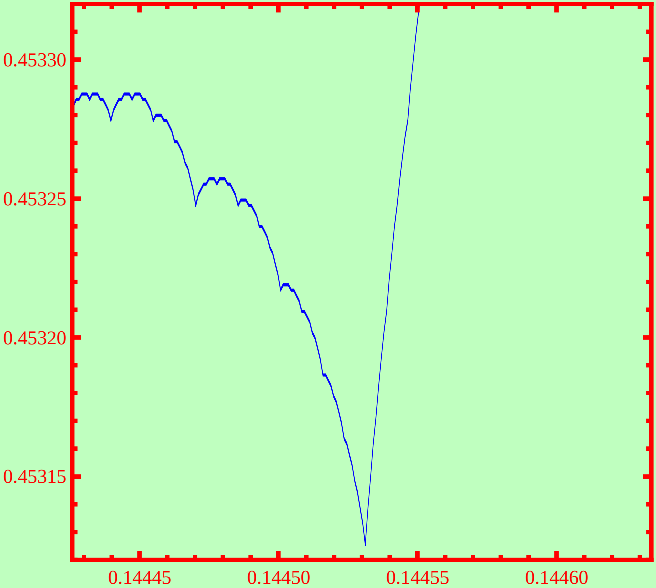
Veamos como es la función de Takagi...



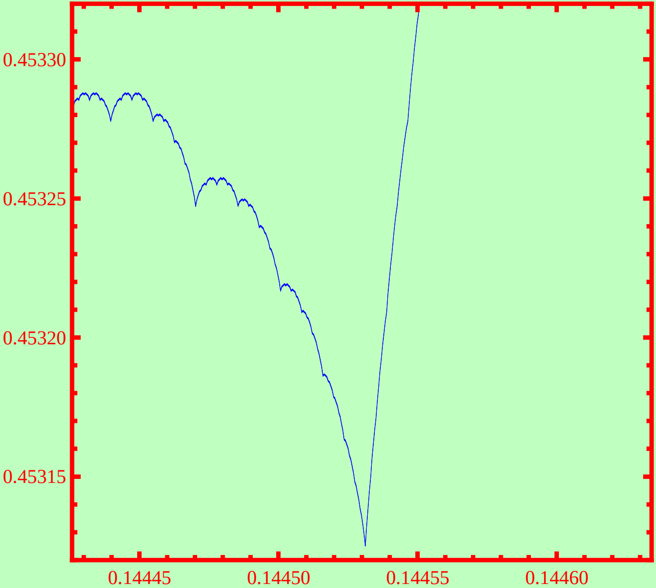
Veamos como es la función de Takagi...



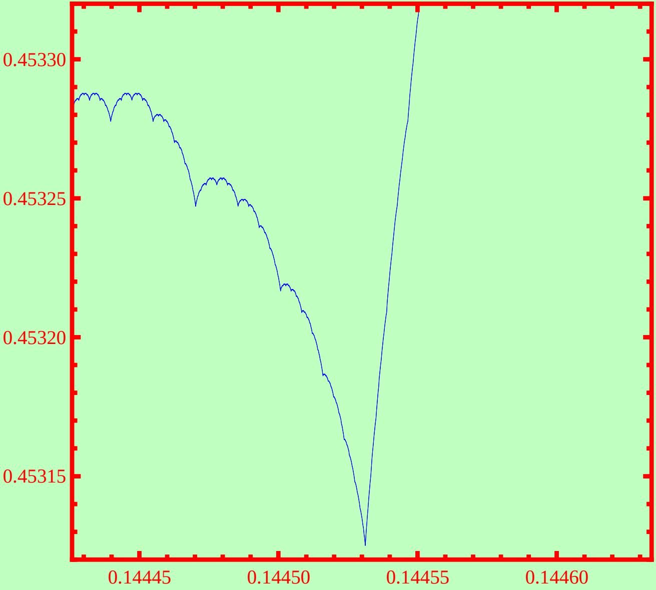
Veamos como es la función de Takagi...



Veamos como es la función de Takagi...



Veamos como es la función de Takagi...



Probemos la lupa con una función más regular...

1. Tomemos una función definida en $\mathbb{R}$ que sea suficientemente regular, por ejemplo, $f \in C^3(\mathbb{R})$ con f''' acotada.
2. Según el teorema de Taylor. Dados x y x_0 existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(c)(x-x_0)^3$$

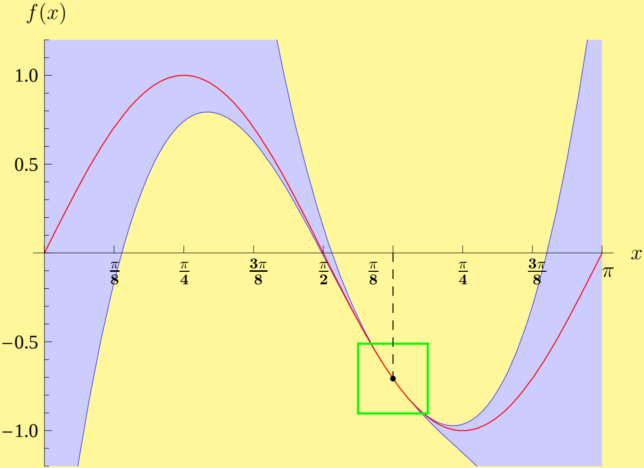
3. $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 = \frac{1}{3!}f'''(c)(x-x_0)^3$
4. y como f''' está acotada existe una constante $K \geq 0$ tal que

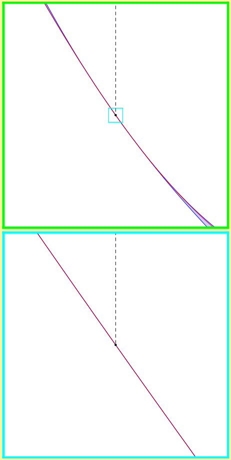
$$\left| f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 \right| < K|x-x_0|^3$$

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + K|x-x_0|^3$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 - K|x-x_0|^3 < f(x)$$

Probemos la lupa con una función más regular...



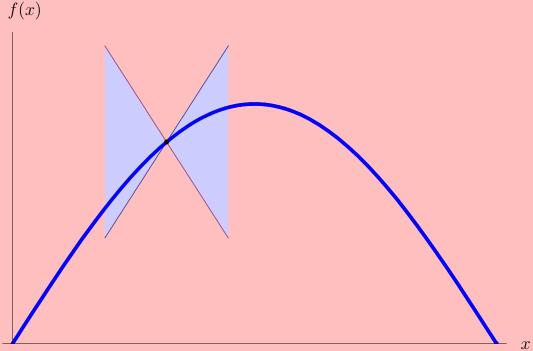


- ❺ Al utilizar la lupa vemos que la función es cada vez más anodina...
- ❻ Podríamos haber razonado en un entorno de x_0.

La función de Takagi

La función de Takagi no es localmente Lipschitz

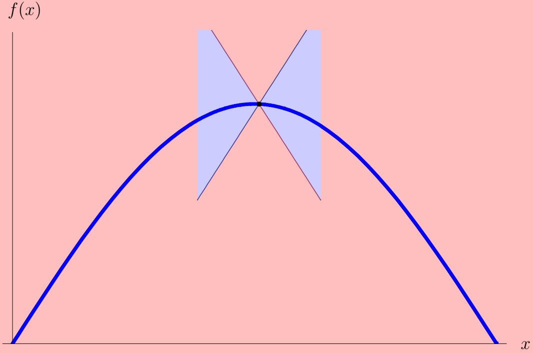
1. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **Lipschitz** si existe $K > 0$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se cumple $|f(x_1) - f(x_2)| < K|x_1 - x_2|$
2. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **localmente Lipschitz** si para cada punto $x \in X$ existe un entorno en el que la función es Lipschitz.



La función de Takagi

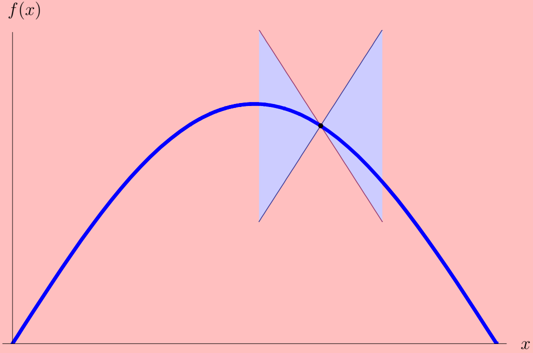
La función de Takagi no es localmente Lipschitz

1. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **Lipschitz** si existe $K > 0$ tal que para cualesquiera x_1,$x_2 \in X$ se cumple $|f(x_1) - f(x_2)| < K|x_1 - x_2|$
2. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **localmente Lipschitz** si para cada punto $x \in X$ existe un entorno en el que la función es Lipschitz.



La función de Takagi no es localmente Lipschitz

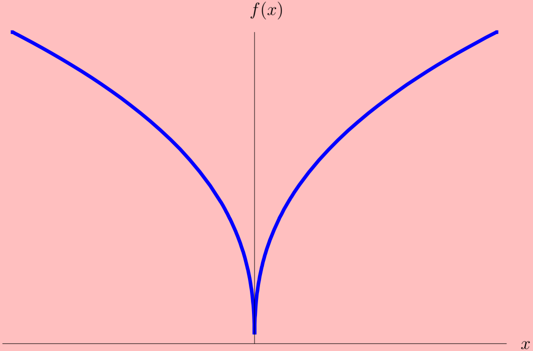
1. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **Lipschitz** si existe $K > 0$ tal que para cualesquiera x_1,$x_2 \in X$ se cumple $|f(x_1) - f(x_2)| < K|x_1 - x_2|$
2. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **localmente Lipschitz** si para cada punto $x \in X$ existe un entorno en el que la función es Lipschitz.



La función de Takagi

La función de Takagi no es localmente Lipschitz

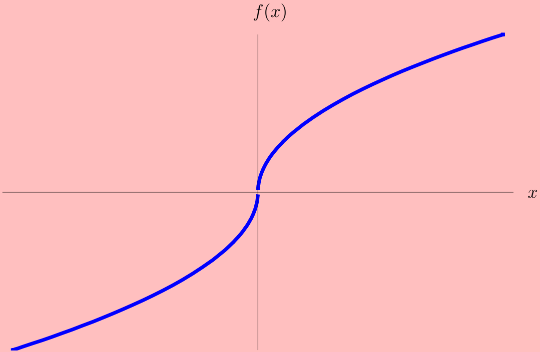
1. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **Lipschitz** si existe $K > 0$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se cumple $|f(x_1) - f(x_2)| < K|x_1 - x_2|$
2. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **localmente Lipschitz** si para cada punto $x \in X$ existe un entorno en el que la función es Lipschitz.



La función de Takagi

La función de Takagi no es localmente Lipschitz

1. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **Lipschitz** si existe $K > 0$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se cumple $|f(x_1) - f(x_2)| < K|x_1 - x_2|$
2. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **localmente Lipschitz** si para cada punto $x \in X$ existe un entorno en el que la función es Lipschitz.



La función de Takagi

La función de Takagi no es localmente Lipschitz

1. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **Lipschitz** si existe $K > 0$ tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ se cumple $|f(x_1) - f(x_2)| < K|x_1 - x_2|$
2. Decimos que $f : X \supset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **localmente Lipschitz** si para cada punto $x \in X$ existe un entorno en el que la función es Lipschitz.
3. Un resultado importante: si f es Lipshitz entonces es **derivable** *en casi todo punto*.
4. Como la función de Takagi no es derivable entonces **no es Lipschitz** en ningún abierto de su dominio. Tiene "pinchitos" o "paredes" por todas partes...
5. Esto hace que no esté nada claro que podamos dibujarla "sin levantar el lápiz del papel" cosa que, no obstante, si parece posible para funciones "suficientemente derivables".

Otras propiedades curiosas...

Extremos, integrales,...

1. **Extremos:** T es una función real continua definida en un compacto: **tiene máximos y mínimos** (que no podemos obtener derivando...).
   - **Mínimos absolutos:** $T(0) = 0$ y $T(1) = 0$ (¡T es positiva!).
   - **Máximos absolutos:** Se encuentran en el conjunto de puntos del intervalo $(0, 1)$ que tienen la propiedad de que **su desarrollo decimal expresado en base cuatro** no tiene entre sus cifras ni el 0 ni el 3 (!!). Es un conjunto del tipo del conjunto de Cantor y, en particular, tiene la cardinalidad del continuo.
2. La convergencia uniforme de la serie que define T nos permite obtener su **integral** "intercambiando serie por integral"

$$\int_0^x T(\xi)d\xi = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} d_k(\xi)d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x d_k(\xi)d\xi$$

Otras propiedades curiosas: extremos, la integral,...

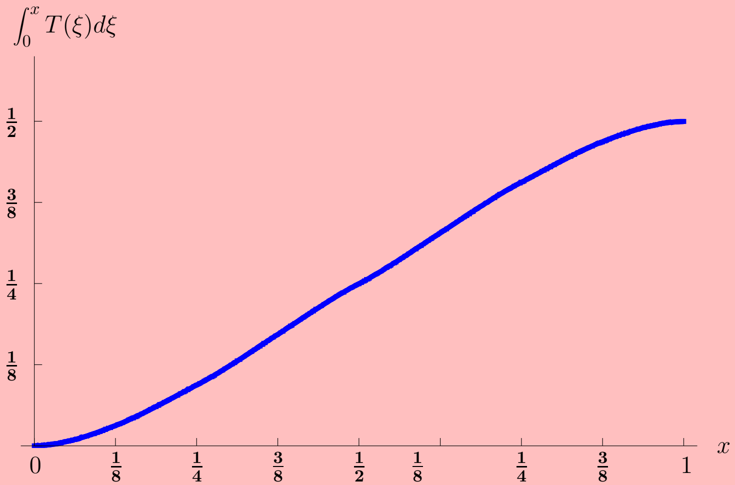
3. $$\boxed{\int_0^x T(\xi)d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}} \left(\lfloor 2^k x \rfloor + 4s(2^k x - \lfloor 2^k x \rfloor) \right)}$$

   donde $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que x y la función $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ está definida como

   $$s(t) := \int_0^t d_0(u)du = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & t \in [0, 1/2] \\ t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{4} & t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

4. La gráfica será horrorosa... ¿no?
5. En realidad es una gráfica muy suave, **como es de esperar**, en la que es difícil apreciar la complejidad de la función de la que proviene. Las representaciones gráficas tienen limitaciones difíciles de superar...

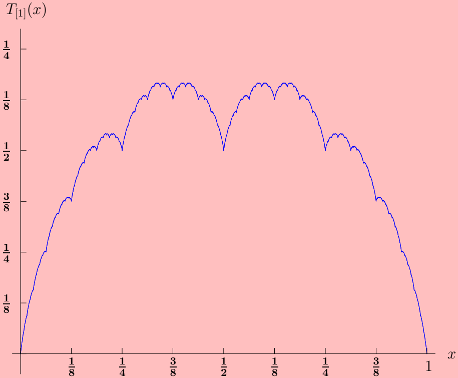
Otras propiedades curiosas: extremos, la integral,...



Una interesante familia de generalizaciones

1. Consideremos ahora $\boxed{T_{[a]} : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a^k d_k(x)}$ con $a \in \mathbb{R}$
2. Veamos como son algunas de estas funciones...

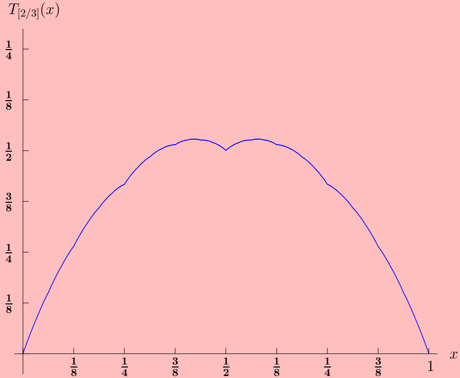
$\boxed{T_{[1]}}$



Una interesante familia de generalizaciones

1. Consideremos ahora $\boxed{T_{[a]} : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a^k d_k(x)}$ con $a \in \mathbb{R}$
2. Veamos como son algunas de estas funciones...

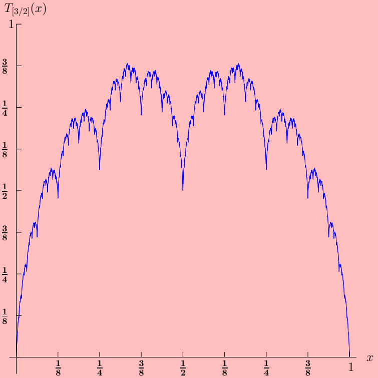
$\boxed{T_{[2/3]}}$



Una interesante familia de generalizaciones

1. Consideremos ahora $\boxed{T_{[a]} : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a^k d_k(x)}$ con $a \in \mathbb{R}$
2. Veamos como son algunas de estas funciones...

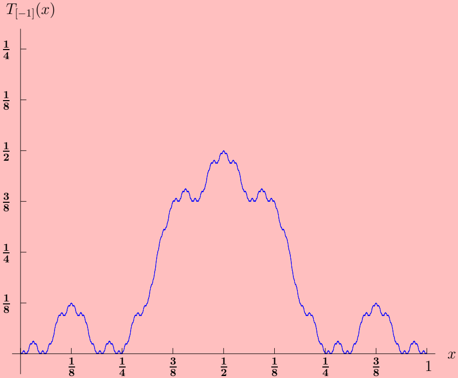
$\boxed{T_{[3/2]}}$



Una interesante familia de generalizaciones

1. Consideremos ahora $\boxed{T_{[a]} : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a^k d_k(x)}$ con $a \in \mathbb{R}$
2. Veamos como son algunas de estas funciones...

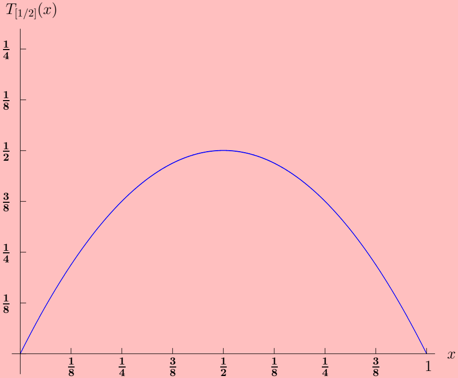
$\boxed{T_{[-1]}}$



Una interesante familia de generalizaciones

1. Consideremos ahora $\boxed{T_{[a]} : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a^k d_k(x)}$ con $a \in \mathbb{R}$
2. Veamos como son algunas de estas funciones...

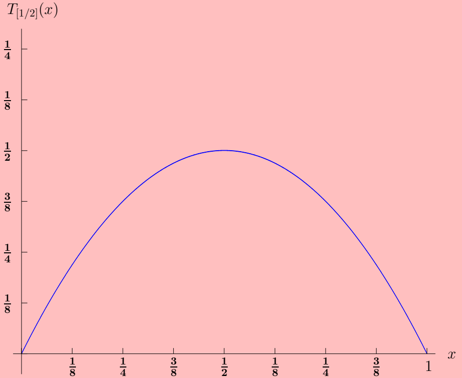
$\boxed{T_{[1/2]}}$



Una interesante familia de generalizaciones

1. Consideremos ahora $\boxed{T_{[a]} : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a^k d_k(x)}$ con $a \in \mathbb{R}$
2. Veamos como son algunas de estas funciones...

$$\boxed{T_{[1/2]}(x) = 2x(1-x)}$$



Comentarios finales

1. Continuidad y diferenciabilidad son conceptos muy diferentes.
2. Hay ejemplos, como la función de Takagi, que podemos manejar con relativa facilidad y que nos permiten explorar funciones no elementales con propiedades interesantes.
3. Para ello, eso sí, tenemos que recurrir a métodos relativamente avanzados o ser más ingeniosos...
4. Es importante ser conscientes de que las funciones elementales presentan muchos comportamientos que no son genéricos.
5. También es importante ser conscientes de que las manipulaciones algebraicas que se aprenden en la escuela sólo pueden ser aplicadas en ciertos contextos.
6. Hay interesantes familias de generalizaciones con propiedades curiosas. Algunas de ellas son funciones derivables salvo en un conjunto denso y algunas, incluso, ¡son infinitamente diferenciables!
7. *Final disclaimer.* (descargo de responsabilidad)