Base 2, base 3,..., base *n*: curiosidades de los sistemas de numeración

J. Fernando Barbero G.
Instituto de Estructura de la Materia, CSIC.
Grupo de Teorías de Campos y Física Estadística,
Unidad Asociada CSIC-UC3M
Semana de la Ciencia en Madrid, 14 de noviembre de 2018

CSIC
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

¿Qué pretendo con esta charla? back

Unas palabras de Plutarco

«La mente no es un recipiente que hay que llenar, sino un fuego que hay que encender.»

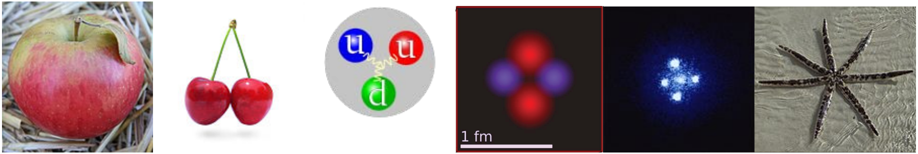
Un experimento

- Es una charla sobre **matemáticas** con **espíritu matemático**.
- Mi objetivo es haceros **pensar e invitaros a que os hagáis preguntas**; también contaros cosas curiosas.
- Para ello me fijaré en objetos matemáticos muy básicos: **los números**.
- Por el camino percibiremos algunas limitaciones de nuestro pensamiento y nos daremos cuenta de que algunas cosas relacionadas con los números y su representación están grabadas a fuego en nuestras mentes.
- **Por ejemplo:** el sistema de **numeración decimal** y los **numerales arábigos**.

¿Cómo contamos?

back

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho...



Los números

- Expresan una propiedad básica de los conjuntos finitos **relacionada con su tamaño**.
- No los voy a definir de forma abstracta. Me apoyaré en la idea intuitiva que todos tenemos sobre los **números enteros**.
- Es muy importante distinguir el **concepto abstracto de número** de su **representación escrita** (*numeral*).
- **¿Cómo les ponemos nombres a las cantidades?**

Números y numerales

back

Vamos a contar...

- No es práctico **inventar una palabra diferente** para cada número...
- Si, por otra parte, queremos representarlos de forma gráfica no arreglamos nada poniendo puntitos o palotes que representen cada unidad...
- Tampoco sirve de mucho inventar **un símbolo distinto** para cada número.
- Necesitamos una **forma sistemática** de poder expresar cantidades arbitrarias mediante un **conjunto finito de palabras** (para el lenguaje verbal) o **símbolos** (si queremos hacer aritmética).
- Varios sistemas:
  - Notaciones «aditivas» (p.ej. números romanos). Como si usáramos monedas.
  - **Sistemas de numeración posicionales.**

Números y numerales

back

¿Habéis intentado multiplicar alguna vez con números romanos?

Números y numerales

back

¿Habéis intentado multiplicar alguna vez con números romanos?

Sistemas de numeración posicionales.

- Se basan en introducir **un número finito de símbolos** distintos para representar números enteros consecutivos hasta uno dado que define la **base del sistema de numeración**.
- Es muy importante, como veremos, introducir un símbolo que represente una cantidad nula: **el cero**.
- Nosotros empleamos el **sistema de numeración decimal** (tenemos diez dedos). Las palabras que utilizamos para nombrar los números están adaptadas a este sistema.
- Otras culturas utilizan sistemas de numeración distintos. Hay culturas en América del Norte que cuentan *con los huecos de los dedos* (octal).
- En nuestro sistema de numeración decimal utilizamos los numerales arábigos: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,** pero hay más:

Numerales del mundo

back

٠١٢٣٤٥٦٧٨٩

I II III IV V VI VII VIII IX X

০১২৩৪৫৬৭৮৯

൦൧൨൩൪൫൬൭൮൯

๐๑๒๓๔๕๖๗๘๙

〇一二三四五六七八九

Numerales arábigos orientales, romanos, bengalíes, malayalam, tailandeses y chinos.

Numerales del mundo

back

¿Cómo funcionan nuestros números? back

Base 8

8^2 8^1 $\boxed{8^0}$, $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8^2}$

¿Cómo funcionan nuestros números? back

Comentarios

- El papel del 0 es indicar que un recipiente concreto «no se usa». No ponemos ceros a la izquierda...
- La representación así obtenida **es única** (con una posible salvedad).
- **Podríamos haber empleado cualquier otra base.** Si la base es mayor que diez tenemos que **introducir otros símbolos** para expresar los numerales correspondientes al once, doce,...
- Para bases razonablemente pequeñas (hasta alrededor de 35) podemos añadir letras.
- Por ejemplo, en **hexadecimal** (base 16) se usan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f. Luego veremos la base 60.
- El número de cifras a la izquierda de la coma es **siempre finito**, ¡sin embargo a la derecha de la coma podemos tener una sucesión infinita de cifras!

¿Cómo funcionan nuestros números? back

¿Tiene sentido considerar bases distintas?

- El número es el número **independientemente de su representación**.

$$1263437 = 100110100011101001101_2$$

- «Entendemos» intuitivamente el número de la izquierda pero el de la derecha nos deja bastante fríos... En base dos parece que la información numérica **está más diluida** (tiende a estar más concentrada en la posición de las cifras que en su valor). Si hay demasiadas posiciones nos perdemos (nos cuesta «contar de un vistazo»).
- Al revés

$$1263437 = 13474d_{16}$$

- En base 16 (hexadecimal) la información **está menos concentrada** en la **posición** de las cifras.

Comparemos bases

back

¿Cuanto se «estiran» los números al cambiar de base?

- El número anterior tiene siete cifras en base diez, veintiuna en base dos y seis en hexadecimal (factores ≈ 3 y $\approx 6/7$)
- Los valores «exactos» son $\log_2 10 \approx 3{,}32193$ y $\log_{16} 10 \approx 0{,}830482$.
- En base 60 sería $\log_{60} 10 \approx 0{,}562382$
- La «finura» de los órdenes de magnitud es mayor para bases pequeñas.

Hay características de los números que son independientes de la representación y otras que no, por ejemplo:

- Ser **capicúa** depende, obviamente de la base: once es capicúa en base 10 pero no en base 2 ($11 = 1011_2$).
- Ser **par** (es decir, **divisible por dos**), pero ¡ojo! $14 = 11_{13}$

Tablas de suma y multiplicación back

Base 2

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Base 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Tabla de sumar en base 16 back

Base 16

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	a	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
b	b	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a
c	c	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a	1b
d	d	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a	1b	1c
e	e	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a	1b	1c	1d
f	f	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a	1b	1c	1d	1e

Tabla de multiplicar en base 16 back

Base 16

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
2	0	2	4	6	8	a	c	e	10	12	14	16	18	1a	1c	1e
3	0	3	6	9	c	f	12	15	18	1b	1e	21	24	27	2a	2d
4	0	4	8	c	10	14	18	1c	20	24	28	2c	30	34	38	3c
5	0	5	a	f	14	19	1e	23	28	2d	32	37	3c	41	46	4b
6	0	6	c	12	18	1e	24	2a	30	36	3c	42	48	4e	54	5a
7	0	7	e	15	1c	23	2a	31	38	3f	46	4d	54	5b	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1b	24	2d	36	3f	48	51	5a	63	6c	75	7e	87
a	0	a	14	1e	28	32	3c	46	50	5a	64	6e	78	82	8c	96
b	0	b	16	21	2c	37	42	4d	58	63	6e	79	84	8f	9a	a5
c	0	c	18	24	30	3c	48	54	60	6c	78	84	90	9c	a8	b4
d	0	d	1a	27	34	41	4e	5b	68	75	82	8f	9c	a9	b6	c3
e	0	e	1c	2a	38	46	54	62	70	7e	8c	9a	a8	b6	c4	d2
f	0	f	1e	2d	3c	4b	5a	69	78	87	96	a5	b4	c3	d2	e1

Cuentas en binario

back

Una suma

$$\begin{array}{r} 1011101 \\ 1011101 \\ +\quad 111101 \\ 1101001 \\ \hline 101100000 \end{array}$$

$93 + 93 + 61 + 105 = 352$

Una multiplicación

$$\begin{array}{r} 10110 \\ \times 11011 \\ \hline 10110 \\ 10110 \\ 10110 \\ 10110 \\ \hline 1001010010 \end{array}$$

$22 \times 27 = 594$

bin.	dec.
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
⋮	⋮

Reglas de divisibilidad

back

… o cómo calcular restos. Se basan en lo que se conoce como **aritmética modular**. **Son distintas en cada base**.

Base 10

$N = a_0\times 10^0 + a_1\times 10^1 + a_2\times 10^2 + a_3\times 10^3 + a_4\times 10^4 + a_5\times 10^5 + a_6\times 10^6 + a_7\times 10^7 + a_8\times 10^8 + a_9\times 10^9 + a_{10}\times 10^{10} + \cdots$

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	$k=11$
$10^k \pmod{2}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$10^k \pmod{3}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$10^k \pmod{4}$	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$10^k \pmod{5}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$10^k \pmod{6}$	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$10^k \pmod{7}$	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5
$10^k \pmod{8}$	1	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$10^k \pmod{9}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$10^k \pmod{10}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$10^k \pmod{11}$	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10
$10^k \pmod{12}$	1	10	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$10^k \pmod{13}$	1	10	9	12	3	4	1	10	9	12	3	4

Sustituir 10^k por los números de la fila correspondiente a $\mathrm{mod}\,k$

Reglas de divisibilidad

back

Base 10: ejemplos

- **Resto de dividir** 132 **por 2** [o, lo que es lo mismo, $132 (\mathrm{mod} 2)$]. Según la tabla anterior es el resto de dividir la última cifra por dos, es decir 0.
- **Resto de dividir** 132 **por 3** [o, lo que es lo mismo, $132 (\mathrm{mod} 3)$]. Según la tabla anterior es el resto de dividir la suma de todas las cifras por tres, es decir 0.
- **Resto de dividir** 132 **por 4** [$132 (\mathrm{mod} 4)$]. Según la tabla anterior es el resto de dividir entre cuatro la suma del doble de las decenas más las unidades; en este caso 0. La tabla nos dice que solo importan los dígitos que ocupan la posición de las decenas y las unidades (gracias a todos esos ceros...).
- **Resto de dividir** 132 **por 7** [$132 (\mathrm{mod} 4)$]. Algo más complicado...
- **Resto de dividir** 413245 **por 11** [$413245 (\mathrm{mod} 11)$]. Trocear en pares y sumar hasta que queden dos cifras $41|32|45 \rightarrow 1|18 \rightarrow 19 \rightarrow$ resto 8.

Reglas de divisibilidad

back

Base 2

$$N = a_0\times 2^0 + a_1\times 2^1 + a_2\times 2^2 + a_3\times 2^3 + a_4\times 2^4 + a_5\times 2^5 + a_6\times 2^6 + a_7\times 2^7 + a_8\times 2^8 + a_9\times 2^9 + a_{10}\times 2^{10} + \cdots$$

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$	$k=11$
$2^k(\mathrm{mod}2)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2^k(\mathrm{mod}3)$	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10
$2^k(\mathrm{mod}4)$	1	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2^k(\mathrm{mod}5)$	1	10	100	11	1	10	100	11	1	10	100	11
$2^k(\mathrm{mod}6)$	1	10	100	10	100	10	100	10	100	10	100	10
$2^k(\mathrm{mod}7)$	1	10	100	1	10	100	1	10	100	1	10	100
$2^k(\mathrm{mod}8)$	1	10	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$2^k(\mathrm{mod}9)$	1	10	100	1000	111	101	1	10	100	1000	111	101
$2^k(\mathrm{mod}10)$	1	10	100	1000	110	10	100	1000	110	10	100	1000
$2^k(\mathrm{mod}11)$	1	10	100	1000	101	1010	1001	111	11	110	1	10
$2^k(\mathrm{mod}12)$	1	10	100	1000	100	1000	100	1000	100	1000	100	1000
$2^k(\mathrm{mod}13)$	1	10	100	1000	11	110	1100	1011	1001	101	1010	111

Reglas de divisibilidad

back

Base 2: ejemplos

- **Casos fáciles:** dos, cuatro y ocho (el resto lo dan la última, las dos últimas o las tres últimas cifras respectivamente).
- Los restos módulo 3 se sacan con la misma idea que funciona para los restos módulo 11 en base 10.
- Los restos módulo 7 se sacan con una idea parecida a la segunda de $11 (\mathrm{mod} 10)$. Ejemplo: $1902 = 11|101|101|110_2 \to 10|011_2 \to 101_2$.
- Los restos módulo 10 o módulo 13 son un verdadero lío...

Las bases en el mundo y en la historia back

- Hay culturas (los Pirahã de la Amazonia) que no tienen palabras para los números...
- Ramon Llull fue un precursor moderno de la notación **binaria**. También Leibniz, Boole, Shannon. Es fundamental para la **electrónica digital**.
- El ADN está escrito en **base 4** con los numerales A, T, G, C (somos un enorme número en base 4...). Se conocen lenguas nativas de Norteamérica que empleaban esta base.
- Numerosas lenguas de Oceanía utilizan sistemas de numeración con bases exóticas como 5, 6, 15, 23 (!), 24 y 27.
- La **base 8** (*octal*) se usaba en lenguas nativas de California y México.
- La **base 12** se usa en lenguas de Nigeria y Nepal. Durante la Revolución francesa se llegó a proponer cambiar a base 12. Para mediar entre los «decimales» y los «duodecimales» Lagrange (¿en broma?) propuso pasar a base 11...
- La **base 20** se usa en la cultura maya, vasca y en numerosas lenguas de todo el mundo (¿manos y pies?).
- La **base 60** se usaba en Mesopotamia.

Una pregunta

back

¿Podemos calcular un dígito de π sin calcular los que le preceden?

Una pregunta

back

¿Podemos calcular un dígito de π sin calcular los que le preceden?

¡Sí!... pero solo en base 2, 4 o 16

Una pregunta

back

¿Podemos calcular un dígito de π sin calcular los que le preceden?

¡Sí!... pero solo en base 2, 4 o 16

Usando la siguiente fórmula maravillosa (D. Bailey, P. Borwein y S. Plouffe)

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

¿Cómo funciona?

Hagamos un ejemplo parecido back

$$\log\frac{10}{9}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k10^k}\approx 0{,}10536051565\textcolor{red}{6}825$$

Para ello calculo la parte decimal de $10^9\log\frac{10}{9}=\sum_{k=1}^{9}\frac{10^{9-k}}{k}+\sum_{k=10}^{\infty}\frac{10^9}{k10^k}$

Partes fraccionarias

$$\left\{\frac{10^8}{1}\right\}=0\quad\left\{\frac{10^7}{2}\right\}=0\quad\left\{\frac{10^6}{3}\right\}=\frac{1}{3}$$

$$\left\{\frac{10^5}{4}\right\}=0\quad\left\{\frac{10^4}{5}\right\}=0\quad\left\{\frac{10^3}{6}\right\}=\frac{2}{3}$$

$$\left\{\frac{10^2}{7}\right\}=\frac{2}{7}\quad\left\{\frac{10^1}{8}\right\}=\frac{1}{4}\quad\left\{\frac{10^0}{9}\right\}=\frac{1}{9}$$

Para ello aplico «reglas de divisibilidad» (aritmética modular).

Partes fraccionarias

$$\sum_{k=10}^{\infty}\frac{10^9}{k10^k}<\frac{1}{10}\sum_{k=10}^{\infty}10^{9-k}$$

$$=\frac{1}{90}=0{,}011111\cdots$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{9}\frac{10^{9-k}}{k}\right\}=\frac{163}{252}\approx \textcolor{red}{0{,}646825}$$

Hagamos un ejemplo parecido back

$$\log\frac{10}{9}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k10^k}\approx 0{,}10536051565682 5$$

Para ello calculo la parte decimal de $10^9\log\frac{10}{9}=\sum_{k=1}^{9}\frac{10^{9-k}}{k}+\sum_{k=10}^{\infty}\frac{10^9}{k10^k}$

Partes fraccionarias

$$\left\{\frac{10^8}{1}\right\}=0\quad\left\{\frac{10^7}{2}\right\}=0\quad\left\{\frac{10^6}{3}\right\}=\frac{1}{3}$$

$$\left\{\frac{10^5}{4}\right\}=0\quad\left\{\frac{10^4}{5}\right\}=0\quad\left\{\frac{10^3}{6}\right\}=\frac{2}{3}$$

$$\left\{\frac{10^2}{7}\right\}=\frac{2}{7}\quad\left\{\frac{10^1}{8}\right\}=\frac{1}{4}\quad\left\{\frac{10^0}{9}\right\}=\frac{1}{9}$$

Para ello aplico «reglas de divisibilidad» (aritmética modular).

Partes fraccionarias

$$\sum_{k=10}^{\infty}\frac{10^9}{k10^k}<\frac{1}{10}\sum_{k=10}^{\infty}10^{9-k}$$

$$=\frac{1}{90}=0{,}011111\cdots$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{9}\frac{10^{9-k}}{k}\right\}+\frac{1}{90}=\frac{829}{1260}\approx 0{,}657937$$

Cambios de base: 2, 4, 8 y 16 back

Son cambios «directos» (basta reemplazar grupos de cifras).

$$\underbrace{1101}_{d}\,\underbrace{0100}_{4}\,\underbrace{1101}_{d}\,\underbrace{0001}_{1}\,\underbrace{0101}_{5}\,\underbrace{1101}_{d}\,\underbrace{0010}_{2}\,\underbrace{0010}_{2}\,\underbrace{1010}_{a}\,\underbrace{1000}_{8}{}_2 = d4d15d22a8_{16}$$

$$\underbrace{11}_{3}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{00}_{0}\,\underbrace{11}_{3}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{00}_{0}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{11}_{3}\,\underbrace{01}_{1}\,\underbrace{00}_{0}\,\underbrace{10}_{2}\,\underbrace{00}_{0}\,\underbrace{10}_{2}\,\underbrace{10}_{2}\,\underbrace{10}_{2}\,\underbrace{10}_{2}\,\underbrace{00}_{0}{}_2 = 31103101113102022220_4$$

Para pasar de **base dos** a **base ocho** agrupamos las cifras de tres en tres empezando por la derecha.

> Si conocemos las cifras en base 16 podemos encontrarlas fácilmente en base 4 y 2 y, de ahí, obtenerlas en base 8.

Además no es necesario conocerlas todas...

Multiplicación rusa

back

Multiplicando sin tablas...

163	**234**	234×2^0
81	**468**	234×2^1
40	936	234×2^2
20	1872	234×2^3
10	3744	234×2^4
5	**7488**	234×2^5
2	14976	234×2^6
1	**29952**	234×2^7
	38142	

- Basta saber hacer el doble y la mitad.
- La idea es escribir uno de los números como suma de potencias de dos. Por ejemplo:

$$\boxed{163 = 2^7 + 2^5 + 2^1 + 2^0}$$

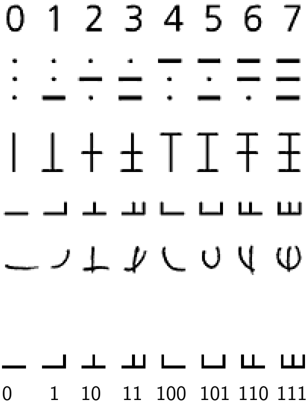
- Nótese que en base 2 escribimos 163 de la forma 10100011
- $\boxed{163 \times 234 = (2^7 + 2^5 + 2^1 + 2^0) \times 234}$
- Trabajar en **base 2** sin hacerlo del todo...

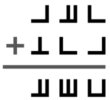
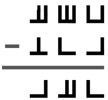
Ejercicio: adaptar el procedimiento para multiplicar números romanos.

Base 8

back

Octomatics



Decimal	Octal	Octom.
$\begin{array}{r} 92 \\ +161 \\ \hline 253 \end{array}$	$\begin{array}{r} 134 \\ +241 \\ \hline 375 \end{array}$	
$\begin{array}{r} 253 \\ -161 \\ \hline 92 \end{array}$	$\begin{array}{r} 375 \\ -241 \\ \hline 134 \end{array}$	

Hay hasta canciones donde aparece la base 8 (*New Math* by Tom Lehrer).

Base 13

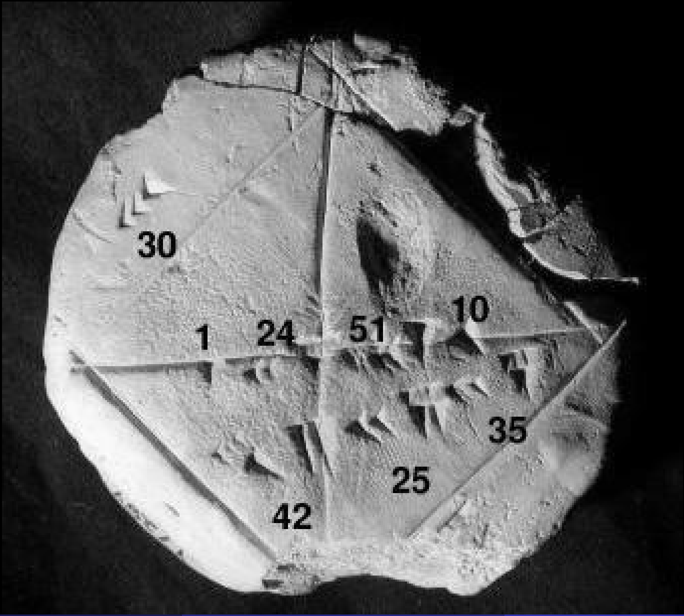
back

La función base 13 de Conway

- En cada intervalo toma **todos los valores reales**.
- No hay quien pueda pintar su gráfica...
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ hacer lo siguiente:
  1. Escribir x en base trece [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c].
  2. Quitar signo y coma «decimal».
  3. Si a partir de un cierto punto el desarrollo en base 13 de x tiene la forma $ax_1 \cdots x_n c y_1 \cdots$ con $x_i, y_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ entonces $f(x) = x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots$ en base 10.
  4. Si a partir de un cierto punto el desarrollo en base 13 de x tiene la forma $bx_1 \cdots x_n c y_1 \cdots$ con $x_i, y_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ entonces $f(x) = -x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots$ en base 10.
  5. En el resto de los casos $f(x) = 0$.
- **No es continua** en ningún punto aunque cumple la **propiedad del valor intermedio**.

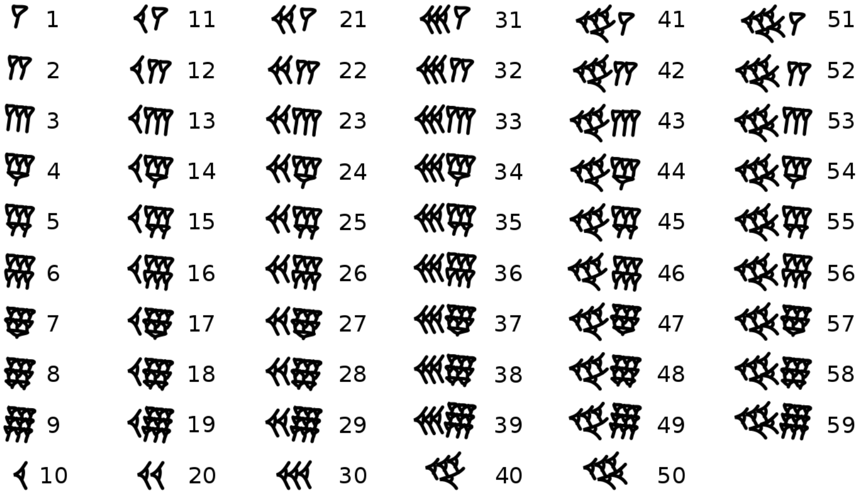
Base 60

back



Base 60

back


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59

Para concluir: una adivinanza back

$=$

31 **Oct** $=$ 25 **Dec**

Créditos (a cada uno lo suyo...) back

Página 3 [[By Jonathunder - Own work, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11808709]]

Página 3 [[By Benjamint444, edited by Fir0002 - Own work, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3177559]]

Página 3 [[By Jacek rybak - Own work, CC BY-SA 4.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=65499244]]

Página 3 [[By User:Yzmo - Own work, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2246091]]

Página 3 [[NASA, ESA, STScI]]

Página 3 [[By لا روسا - Own work, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=27413286]]

Página 7 [[By Psihedelisto - Own work, CC BY-SA 4.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=50144748]]

Página 8 [[By Ajfweb at English Wikipedia, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=46608551]]

Página 9 [[F. Barbero]]

Página 29 [[http://www.infoverse.org/octomatics/octomatics.htm]]

Créditos (a cada uno lo suyo...) back

Página 31 [[By Bill Casselman - Own work, CC BY 2.5, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2154237]]

Página 32 [[By Josell7 - File:Babylonian_numerals.jpg, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9862983]]

Página 33 [[CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=157476]]

Página 33 [[By Gerbil - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5840715]]

¡Gracias!